



5.9.271







AI

QUINTO LIBRO
DEGLI
ELEMENTI
D' EUCLIDE
OVERO

SCIENZA UNIVERSALE
DELLE PROPORZIONI

PARTE SECONDA.

*Della libreria di San. Giuseppe
di Firenze di Baldiellini
nell' an. 1711/13.*



045151-17100

44025

1990

ACKNOWLEDGEMENTS

04.50

APPENDIX A

150 292000

[illegible]

5.6.23!



QUINTO LIBRO

D E G L I

ELEMENTI D' EUCLIDE

SCIENZA UNIVERSALE
DELLE PROPORZIONI



DEFINIZIONI.

I.

C Randezze omogenee , s' intendon quelle , che son tra loro d' un medesimo genere .

Cioè quelle , alle quali si convien una stessa definizione generale della lor quantità , o estensione .

P Er esempio (tra le quantità così continue , come disgiunte) tutte le linee in generale , siccome tutte le superficie , tutti i

Tomo II.

A

cor.

corpi, tutte le velocità, tutti i momenti, tutte le forze assolute, tutti i tempi, tutti i numeri ec., son grandezze omogenee, perchè sotto la general definizione della linea cadono tutte le linee, tanto la retta, che la curva, o che la mista ancorchè poste in un medesimo, o in diversi piani; e sotto la definizione generale della superficie cadono tanto la superficie piana, che la concava, o che la mista ec., e così intendasi d'ogni altro genere di grandezze.

II.

Def. 2. Tra due grandezze omogenee, e terminate disuguali: la maggiore si dice Multiplice della minore, quando la minore presa più volte pareggia, e misura appunto la maggiore.

III.

Def. 1. Parte, o summultiplice cioè submultiplice si dice la minore di due grandezze omogenee, terminate, e disuguali, che moltiplicata più volte misura appunto la maggiore.

Questa con voce forse troppo generale, da Euclide si chiama parte, ma però

me-

LIBRO V. 111-3

meglio da altri è detta parte aliquota, e differenza dell'altra detta parte aliquota, la quale è quella grandezza minore, che replicata non misura precisamente la maggiore, e che negli Elementi de' numeri è da Euclide chiamata PARTI.

IV.

Le grandezze di qualunque genere, dicansi egualmente moltiplici delle loro omogenee, quando quelle contengan queste ugual numero di volte. Dal P. Clav.

V.

Proporzione, detta in Latino in-
differentemente colle voci, e *Propor-*
tio, e *Ratio* (che forse più propria-
mente sarebbe detta *Relatio*) è quel-
la scambievole relazione, o ragione,
che hanno insieme due grandezze
omogenee terminate, per quanto s'
appartiene alla lor quantità, o con-
tinua, o disgiunta. Def. 3.
e 4. del
V. lib. d'
Euclide
più lar-
gamente
spiegat.

E le grandezze, o le quantità, fra le quali si fa tal paragone, si dicono i termini della Proporzione.

A 2

Cioè

Cioè *Proporzione* altro non è, che quell' *unica convenienza*, ovvero quell' *unico riguardo*, o *paragone*, o *rispetto*, o *relazione determinata*, e *particolare*, che ha una *quantità terminata verso un' altra a se omogenea*, e *terminata in quanto quella è uguale*, o *per quanto ell' è maggiore*, o *minor di questa*: Poichè non si dà *proporzione*, o *relazione tra due grandezze omogenee*, se non tra quelle, che *moltiplicate*, possono *avanzarsi*, le quali poi sono solamente le *grandezze omogenee terminate*: Siccome non si può far *paragone tra due grandezze omogenee infinite*, nè similmente tra una *finita*, ed un' *altra quantità realmente infinita*.

V I.

Proporzioni simili fra le quantità
(che anco si dicono indifferentemen-
te *proporzioni uguali*, e *proporzioni*
medesime) cioè fra la prima, e la
seconda, e fra la terza, e la quar-
ta, intendansi allora, quando la pri-
ma grandezza, essendo per esempio
uguale, o moltiplice, o summulti-
plice della seconda, anco la terza sia
uguale, o altrettante volte multi-
pli-

Def. 5.
del V.
lib. d'
Euclide
spiegat.
altri-
menti
col Ga-
lileo.

plice , o summultiplice della quarta .
Ed anco quando la prima contenen-
do la seconda più volte , e di più
qualche parte aliquota di essa secon-
da , anco la terza contenga la quar-
ta altrettante volte con altra simil
parte aliquota di essa quarta . Sicco-
mè quando la prima essendo conte-
nuta più volte dalla seconda con
qualche avanzo , anco la terza dalla
quarta sia contenuta altrettante vol-
te , e con altro simile avanzo . Cioè
finalmente quando la prima non sia
niente maggiore , ne minore del bi-
sogno , per avere alla seconda rispet-
to , o relazione simile a quella , che
ha la terza verso la quarta . Che è
il medesimo che dire : Quando la
differenza tra la prima , e la secon-
da sarà simile alla differenza , che è
tra la terza , e la quarta , allora que-
ste due relazioni , o rispetti , o pro-
porzioni dicansi proporzioni simili ,

o medesime, o eguali, come più aggrada. E questa maniera di spiegare le proporzioni simili tanto s'adatta alle quantità continue, che alle disgiunte, le quali son quelle, che si possono esprimer co' numeri.

VII.

Def. 6. Grandezze, o quantità proporzionali dicansi i termini delle proporzioni simili.

Cioè quando la proporzione, che è tra la prima, e la seconda grandezza, sarà simile alla proporzione, che è tra la terza, e la quarta nel modo sopra dichiarato, allora questi termini primo, secondo, terzo, e quarto dicansi grandezze proporzionali.

VIII.

Def. 7. Di due Proporzioni, quella della prima grandezza verso la seconda di-
del V. casi Proporzione maggiore di quella
lib. d' della terza verso la quarta: Cioè di-
Euclid. casi la prima alla seconda aver mag-
spiegat. gior proporzione, che la terza alla
altrim. quar-
col Ga-

quarta, quando la prima sarà alquanto maggior del bisogno, acciocchè la proporzione d'essa prima verso la seconda sia simile alla proporzione della terza verso la quarta.

IX.

Analógia, altrimenti detta Proporzionalità, e la simiglianza di più proporzioni tra grandezze proporzionali, e omogenee, o pur anco di generi differenti.

Def. 8.
e 9. del
lib. V. d'
Euclid.
spiega-
te più
larg.

Come per esempio se la proporzione, o 'l rispetto, che è fra due linee, sarà simile al rispetto, che è fra due altre linee, o al rispetto fra due superficie, o fra due corpi, o fra due numeri ec. questa tal simiglianza di rispetti, o di proporzioni, dicasi Analogia, o Proporzionalità.

E notisi, che l'Analogia, o Proporzionalità non può consistere in meno, che in tre termini di grandezze, ma però omogenee, com'è sarebbe ne' termini di tre linee, di tre corpi, di tre velocità, di tre numeri ec., quando cioè il primo termine al secondo ha Proporzione simile a quella, che ha il secondo al terzo.

X.

Analogia , o Proporzionalità continua , si chiama quando nella comparazione di tre , o di quattro , o di più termini di grandezze omogenee , e proporzionali , que' di mezzo si prendono due volte , servendo ciascuno prima di termine conseguente di una proporzione , e poi di termine antecedente dell'altra simil proporzione , che le succede : cioè quando il primo termine al secondo , sta come 'l secondo al terzo , e come 'l terzo al quarto , e così continuando fino all' ultimo termine , chiamandosi tutti quantità continue proporzionali .

XI.

Analogia , o Proporzionalità discontinua , o disgiunta si chiama quando fra due , o tre , o quattro , o più coppie di proporzioni simili tra quantità omogenee , o pure anco

tra

tra grandezze a due a due di generi differenti, i termini de' simili rispetti si paragonano a coppia , a coppia, talmentchè niuno mai de' termini conseguenti d' una Proposizione serva d' antecedente all' altra simile , che le consegue .

Che sarà , quando il primo termine al secondo starà come il terzo al quarto , e come il quinto al sesto , e così sempre ec.

Le due seguenti Definizioni , perchè son poste da Euclide nel suo quinto Libro , benchè non abbiano uso prima , che nel sesto , essendo bisognose di qualche dichiarazione si porranno qui non ostante .

XII.

Nell' Analogia , o Proporzionalità continua la prima quantità all' ultima si dice aver proporzione tante volte moltiplicata della proporzione della prima grandezza alla seconda , quant' è il numero delle proporzioni che cadono fra' termini estremi .

*Definit.
10 e 11.
del V.
lib. d'
Euclid.
più
chiar.
spieg.*

E così, essendo tre grandezze continue proporzionali, la prima alla terza si dirà aver duplicata proporzione di quella, che ha la prima verso la seconda: E di quattro quantità continue proporzionali, la prima alla quarta si dirà aver proporzione triplicata pur della prima proporzione tra la prima, e la seconda, e similmente la prima alla quinta proporzione quadruplicata della medesima prima proporzione, e così sempre; Che altro non vuol dire, se non che tra la proporzione della prima alla terza cadono due proporzioni della prima alla seconda; e tra la proporzione della prima alla quarta ne cadon tre; similmente tra quelle della prima alla quinta cadono quattro proporzioni, e sempre di quelle della prima alla seconda, perchè tutte l'altre si danno simili a questa.

XIII.

Def. 12.
del V. lib. d'Euclid.
più largam.
spieg. Grandezze omologhe, ovvero corrispondenti s'intendono nelle Proporzioni simili i termini antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro.

Cioè se la proporzione della grandezza A verso B sarà simile alla proporzione della grandezza C verso D, i termini anteceden-

A. B.

C. D.

den-

LIBRO V. 11

menti, A, C, siccome i conseguenti B, D, si dicono omologhi fra loro, cioè, che l' antecedente A della prima proporzione corrisponde all' antecedente C della seconda, e che l' conseguente B della prima corrisponde nell' ordine al conseguente D della medesima seconda Proporzione.

Il rimanente delle Definizioni premesse da Euclide nel quinta Libro si porranno in questo dov' esse avranno uso, in quella guisa, che fece l' ammirabil Geometra Evangelista Torricelli nel suo Trattato delle Proporzioni (com' apparisce dalle copie, che egli medesimo ne diede fuori) e com' anco fece dipoi il Dottore Gio. Alfonso Borelli insigne Filosofo, e celebratissimo Matematico dello studio Pisano nel dottissima, ed utilissimo suo Compendio degli Elementi d' Euclide.

XIV.

Quando faranno due, o tre, o quattro, o più proporzioni in continui termini omogenei, per esempio negli A, B, C, D; la proporzione che è tra il primo termine A, e l' ultimo D, si dirà Proporzione composta di tutte queste date pro-

A 6

por-

porzioni , cioè della proporzione , che è tra A , e B , di quella , che è tra B , e C , e di quella , che è tra C , e D .

Che altro non vuol dire , se non che tra la proporzione della prima A alla quarta D vi mediano quelle tre altre porzioni uniche , e determinate , per mezzo delle quali si forma per necessità quella tal determinata proporzione fra l'estreme A , D .

Questa Definizione non è in Euclide , ma è ben usata così da esso nel sesto Libro , ed altrove , siccome da tutti gli altri Geometri , e Mattematici ; l' ho posta qui , perchè mi occorre valermene qualche volta in questo Trattato . Se altri ne desidera più diffusa dichiarazione , la troverà verso 'l fine del Dialogo del Galileo qui congiunto .

XV.

Quando si dirà , o si proporrà di provare , ch' una proporzione ignota fra due grandezze omogenee , è composta di due altre , o di tre , o di più note porzioni , che sieno date
in

termini dello stesso, o pur di differenti generi, altro non si dovrà attendere, nè altro si vorrà provare, se non che ridotte le note proporzioni in quali si sieno termini omogenei continuati (se però in tali non fossero date prima) la proporzione ignota è la medesima, o simile alla proporzione, che è tra il primo, e l'ultimo de' medesimi presi termini continuati. E questo è uno de' mezzi, per cui l'ignote proporzioni rendonsi note.

Questa Definizione similmente non si trova in Euclide: ma perchè in tal significato egli, ed ogni altra sempre se n'è valso, e l'esperienza m'ha dimostrato, che molti de' Principianti sogliono incontrar difficoltà in concepirla, non riuscirà loro infruttuoso l'addurre in questo luogo alcune Proposizioni delle più elementari attenenti a' piani, a' solidi, alle velocità, e a' momenti, che son dimostrate per tal via da varj Geometrici, e Meccanici, affinchè, allora quando col proseguir gli Studi v'arriverà

arriveranno, sovvenga loro d'osservare in esse, come in effetto tal Definizione vien praticata quivi precisamente nel modo, che sopra s'è avvertito.

E le conclusioni sopraccennate sono le seguenti.

I.

„ Æquiangula parallelogramma in-
 „ ter se rationem habent eam, quæ
 „ ex rationibus laterum componitur;
 „ nempe ex ratione unius lateris pri-
 „ mi parallelogrammi ad unum latus
 „ secundi, & ex ratione reliqui late-
 „ ris primi ad reliquum secundi.

Questo Teorema è d'Euclide la Prop. 23. del sesto Libro.

II.

„ Triangula, & parallelogramma in-
 „ ter se proportionem habent compo-
 „ sitam ex proportionem basium, & ex
 „ proportionem altitudinum.

Questo Teorema è del Commandino, aggiunto alla Prop. 23. del sesto Libro.

III.

„ Cylindri, & Coni proportionem
 „ habent compositam ex proportionem
 „ basium, & ex proportionem altitudi-
 „ num.

Questo pure è del Commandino la proposizione ottava delle sue aggiunte nel
 Co.

ento del Trattato d' Archimede delle
idi, e delle Sferoidi.

IV.

Si duo mobilia ferantur motu æqua-
ili, inæquali tamen velocitate, spa-
a temporibus æqualibus ab ipsis
eracta, habebunt rationem compo-
tam ex ratione velocitatum, & ex
atione temporum.

*Questo Teorema è del Galileo la pro-
posizione quarta del moto equabile.*

V.

„ Quorumcumque gravium a qui-
buslibet distantis suspensorum mo-
menta sunt in ratione composita ex
ratione distantiarum, & ex ratione
gravitatum.

*Questo Teorema fu dimostrato dall' ac-
tissimo Mattematico il Padre Buonaventu-
Cavalieri, e da lui stampato nell' an-
1647. alla Proposizione 6. della sua
uinta Esercitazione Geometrica: benchè
i tal conclusione si fosse prima servito
n tal Giovann' Anton Rocca insigne Geo-
etra, Discipolo di detto Padre, in un
no proprio Lemma Meccanico, il quale
u poi rifrito dal Torricelli in piè della
Proposizione 18. delle sue Quadrature del-
a Parabola, con protestarsi quivi da Uo-
mo ingenuo, e avanti, e dopo che tal
Lem-*

Lemma non era suo, ma di esso Rocca. Lo riferì ancora il detto Padre Cavalieri nella sua terza Esercitazione a carte 231. Ma però questa medesima conclusione, o Teorema quinto, molto prima era noto al nostro Galileo, come apparisce da quel suo Teorema Meccanico del Trattato delle Resistenze, premesso come Lemma al Problema, che propone.

„ Dato il peso massimo retto dal
 „ mezzo d'un Cilindro, o Prisma, do-
 „ ve la resistenza è minima, e dato un
 „ peso maggiore di quello, trovare nel
 „ detto Cilindro il punto, nel quale
 „ il dato peso maggiore sia retto co-
 „ me peso massimo.

Dove manifestamente si riconosce tal quinta conclusione, ed ancora il mezzo per dimostrarla: oltrechè appresso ogni Geometra è ormai regola trita, universale, e sicura (quando ella venga intesa colle debite circostanze) che,

Ratio homogenearum magnitudinum ab homogeneis magnitudinibus numero æqualibus productarum, componitur ex rationibus, quæ sunt inter homonimas magnitudines producentes.

E chi si prenderà cura d'esaminare ciascuno degli addotti esempj, ed ogni altro simile, troverà, che tutti vengono com-

*compresi dal suddetto generale Teorema ,
il quale (se questo ne fusse il luogo) po-
trebbe anco facilmente dimostrarsi . Ma
tanto basta avere avvertito intorno al mo-
do di considerare le proporzioni ignote ,
quando si vuol provare , ch' elleno sien
composte d' altre note Proporzioni .*



DEL.

3 2 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

DELLA DIVISIONE

D E L L E

P R O P O R Z I O N I



A Ffinchè nel presente Trattato delle Proporzioni si abbiano di queste le notizie più principali, con la maggior brevità, che possibil sia, spiegherò què il significato d'alcuni altri nomi soliti usarsi dagli Autori nel maneggio delle medesime Proporzioni.

Sopra a numero 3. assai chiaramente fu definito, ciò che assolutamente intendere si debba per Proporzione tra due grandezze omogenee, sì nella quantità continua, come nella disgiunta.

Ma què notisi prima, che delle quantità, o grandezze, altre son fra loro commensurabili, altre incommensurabili.

I. Quantità fra loro commensurabili son quelle, che son moltiplici d'un'altra, o che hanno di comune una medesima parte aliquota, cioè, che precisamente misura l'una, e l'altra secondo qualche numero.

Per esempio una linea di 25. palmi, e una di 10. diconsi grandezza, o quantità
fra

fra loro commensurabili, perchè ciascuna di loro è moltiplice di una di 5. palmi, cioè l'una, e l'altra è misurata da questa di 5. che è parte aliquota di ciascuna di loro, entrando il 5. appunto, 5. volte nel 25. e due volte appunto nel 10. E tal linea di 5. palmi si dice la comune misura di quelle di 25. e di 10. Siccome è commensurabile una linea di palmi 27. con una di 12. perchè esse hanno per comune misura una lor parte aliquota, che è di tre palmi, la quale misura quelle secondo i numeri 9. o 3. diconsi ancora commensurabili fra di loro, quando la comune misura di esse entra qualche numero di volte nella maggiore, ed una sol volta nella minore; come sono la linea di 10. palmi, e quella d'uno, le quali son misurate da un'altra linea d'un palmo. Sicchè i numeri sono quantità fra loro commensurabili, perchè almeno l'unità gli misura tutti. E però

Quantità commensurabili fra loro son quelle grandezze omogenee, che si possono esprimer co' numeri.

II. Quantità incommensurabili fra loro quelle s'intendono, fra le quali non si dà mai parte aliquota comune, cioè, che le misura amendue. Quali per esempio sono di qualunque quadrato il diametro, e il lato

lato ; fra le quali linee (come prova Euclide nell' ultima del suo X. Libro) non si può mai trovare una terza , e assegnar una parte loro , benchè minima , che sia aliquota d' amendue , la quale cioè , misurando l' una secondo qualche numero , misuri aucò l' altra secondo altro numero per appunto ; e per tanto

Incommensurabili fra loro son quelle grandezze omogenee , che non si possono esprimere , o rappresentare insieme co' numeri .

Ora trattandosi in genere delle Proporzioni fra due grandezze omogenee , altra si dice Proporzione razionale , altra irrazionale .

III. Proporzione razionale è quel rispetto , o relazione , che è fra due grandezze commensurabili tra loro , cioè quella proporzione , che si può ridurre fra due numeri , come di 10. a 8. di 20. a 3. di 7. a 12. di 30. a 10. di 15. a 1. ec.

IV. Proporzione irrazionale è quella relazione , che è tra due grandezze incommensurabili , cioè quella , la quale con due numeri esprimere non si può .

E per tanto fra le quantità disgiunte , cioè fra' numeri , si dà solamente la proporzione razionale ; ma fra le quantità continue si dà e la razionale , e l' irrazionale .

In

In oltre generalmente , così la proporzione razionale come l'irrazionale si divide in proporzione d'ugualità , ed in proporzione di inugualità , o di disugualità .

V. Proporzione d'ugualità è quel paragone , che si fa tra due grandezze uguali fra di loro .

VI. Proporzione di disugualità è il paragone fra due grandezze disuguali .

Questa pur si divide in due altre , cioè in proporzione di maggior disugualità , e in proporzione di minor disugualità .

VII. La prima , quando la proporzione , che si considera , è della grandezza maggiore verso la minore .

VIII. La seconda , quand' ella è della minore verso la maggiore .

Ma tralasciando le Proporzioni irrazionali , che son riservate al decimo Libro , e considerando solamente le razionali , è da sapersi , che quelle di maggior disugualità si distinguono in 5. generi , de' quali i primi tre son semplici , e i rimanenti composti .

Il primo genere è quello della proporzione detta Multiplice . Il secondo della Superparticolare . Il terzo della Superparziale . Il quarto della Multiplice superparticolare . Ed il quinto della Multiplice superparziale .

In altrettanti, anzi ne' medesimi generi si divide la proporzione razionale di minor disugualità, mentre però s'aggiunga a' lor nomi la voce sotto, dicendo Summultiplice, Sussuperparticolare, Sussuperparziente, Summultiplice sussuperparticolare, Summultiplice sussuperparziente.

IX. Tra' generi semplici, la proporzione razionale di maggior disugualità, detta multiplice è, quand' un numero maggiore contien più volte un minore, ed il minore misura appunto il maggiore. E così il 12. al 4. ha proporzione multiplice, perchè il 12. contiene tre volte il 4. ed il 4. misura il 12. E similmente le proporzioni di 15. a tre di 18. a 6. di 30. a 5. &c. si chiamano multiplici, e quella del 12. al 4. dicesi tripla, del 15. al 3. quintupla, del 18. al 6. tripla, del 30. al 5. sestupla &c. La proporzione poi razionale di minor disugualità, cioè del minore al maggiore si chiama summultiplice, e quella del 3. al 12. si dice sugquadrupla; del 3. al 15. sugquintupla, del 6. al 18. suttripla, &c.

X. La proporzione razionale di maggiore disugualità, detta superparticolare è, quando il maggior numero contiene una sol volta il minore, e di più una parte aliquota di esso minore: come il 6. al 4. dice.

dicesi aver proporzione superparticolare con-
terendo il 6. una volta il 4. ed avan-
zandone due, che è parte aliquota di 4.
e tal proporzione di 6. al 4. dicesi sesqui-
altera, che vuol dire il 6. contiene il 4.
una volta, e mezzo; e l' 8. al 6. ha
proporzione sesquiterza, cioè l' 8. contiene
il 6. una volta, e un terzo: ed il 10.
all' 8. ha proporzione sesquiquarta, conte-
nendo il 10. l' 8. una volta, e un quar-
to, e così degli altri. La proporzione poi
razionale di minor disugualità si dice Sus-
superparticolare, chiamandesi quella di 4.
a 6. sussesquialtera, di 6. a 8. sussesqui-
terza, di 8. a 10. sussesquiquarta ec.

XI. La proporzione razionale di mag-
gior disugualità detta superparziente è,
quando 'l maggior numero contiene una sol
volta 'l minore, e di più avanza parti
del minore, cioè una parte non aliquota;
E così 5. a 3. ha proporzione superpa-
rziante, contenendosi dal 5. il 3. una sol
volta, e avanzandogli 2. che è parti del
3. e questa proporzione si chiama super-
biparziante terza; quella di 20. a 11.
supernonaparziante undecima, di 11. a 7.
superquartaparziante settima; di 13. a 8.
superquintaparziante ottava, e così dell'
altre di questo genere ec. All' incontro il
minor numero al maggiore, si dice aver
pro.

proporzione *suſſuperparziente*, e così quella di 3. a 5. chiamasi *suſſuperbiparziante terza*; di 11. a 20. *suſſupernonaparziante undecima*, ec. e così d'ogni altra simile, ec.

XII. Tra' generi composti la proporzione *razionale di maggior disugualità*, detta *multiplice superparticolare* è quando il maggior numero contien più volte il minore, e gli avanza una parte aliquota dello stesso minore. Ond' è che il 20. al 6. si dice aver proporzione *multiplice superparticolare* contenendo il 20. tre volte il 6. ed avanzandogli 2. che è parte aliquota di 6. e questa si nomina *triplesquiterza*, che vuol dire, che il 20. contiene il 6 tre volte, e un terzo; il 18. all' 8. l' ha *duplasesquiquarta*; il 22. al 4. l' ha *quintuplasesquialtera*; il 10. al 4. *duplasesquialtera*; il 17. all' 8. *duplasesquioctava*, ec. Per lo contrario la proporzione del minore al maggiore di questi termini è detta *superparticolare* denominando le sopradette proporzioni coll' aggiunta della proposizione sotto.

XIII. Finalmente, la *proporzione razionale di maggior disugualità* detta *multiplice superparziente* è, quando il maggior numero contien più volte il minore, e gli avanza parti dello stesso minore, cioè

parte non aliquota. E per tanto 11. a 3. ha proporzion multiplice superparziente, contenendo l' 11. il 3. tre volte, e avanzandogli 2. che è parti di 3. e questa dicefi tripla superbiparziente terza; quella di 16. a 6. dupla superquartaparziente sesta; di 8. a 3. dupla superbiparziente terza, &c. Queste proporzioni poi, quando son del minor termine al maggiore, si denominano coll' aggiunta del sotto, come s' è detto dell' altra.



DEL-

DELL' ANALOGIE, O PROPORZIONALITÀ PRINCIPALI.



TRe appresso gli Antichi Scrittori, sono l'Analogie, e le Proporzionalità più principalmente considerate: cioè, l'Arimmetica, la Geometrica [le quali si suddividono in continue, ed in disgiunte] e la Musica, ovvero l'Armonica.

I. La Proporzionalità Arimmetica continua è, quando tre, o più grandezze omogenee differiscono tra di loro per uguali differenze: cioè, quando [essendo tre] la differenza tra la prima, e la seconda sia uguale alla differenza tra la seconda, e la terza [e questa più frequentemente si chiama Medietà Arimmetica] o pure quando [essendo più di tre] la differenza tra la prima, e la seconda sia uguale alla differenza che è tra la seconda, e la terza, e che è tra la terza, e la quarta, e tra la quarta, e la quinta, ec.

Discontinua, o disgiunta, quando, essendo più coppie di grandezze a due a due

omogenee, la differenza tra il primo, e il secondo è uguale alla differenza, tra il terzo, e il quarto, ed a quella tra il quinto, e il sesto.

II. La Proporzionalità Geometrica continua è, quando tre, o più grandezze omogenee differiscono tra di loro con differenze proporzionali all' intere grandezze: cioè quando [essendo tre] la differenza tra la prima, e la seconda, alla differenza tra la seconda, e la terza, stia come la prima grandezza alla seconda o come la seconda alla terza. E questo per lo più dicesi Medietà Geometrica. O quando [essendo più di tre] la prima alla seconda stia come la seconda alla terza, e come la terza alla quarta.

Discontinua, o disgiunta, quando, essendo più coppie di grandezze a due due omogenee, la proporzione del primo termine al secondo sia simile a quella del terzo al quarto, e del quinto al sesto,

III. La Proporzionalità Musica, ovvero Medietà Armonica è, quando, di grandezze continuamente disuguali, la differenza tra la prima, e la seconda, alla differenza tra la seconda, e la terza stia come la prima grandezza alla terza quando le differenze tra le grandezze sono proporzionali all' estreme.

Ma. per definire in breve, le suddette tre medietà fra tre grandezze omogenee continuamente disuguali, si dirà che

I.

Medietà Arimmetica è, quando la differenza tra la prima, e la seconda alla differenza tra la seconda, e la terza sta come la prima grandezza alla prima.

II.

Medietà Geometrica, quando la prima differenza alla seconda sta come la prima grandezza alla seconda.

III.

Medietà Armonica, quando la prima differenza alla seconda sta come la prima grandezza alla terza.

A S S I O M I ; OVVERO COMUNI NOTIZIE.

I.

SE quattro grandezze saranno proporzionali, cioè che in senso della sesta definizione di questo Trattato, la prima alla seconda abbia la medesima proporzione, che la

*Assom-
supposto
dal Ga-
lileo.*

B 3

ter-

terza alla quarta ; anco qualunque multiplice della prima alla seconda , avrà la stessa proporzione , che l' egualmente multiplice della terza alla quarta . Cioè 3. , o 4. , o 7. , o 10. , ec. delle prime alla seconda staranno come 3. , o 4. , o 7. , o 10. , ec. delle terze alla quarta .

II.

*Suppo-
sto dal
Galil.*

Similmente , se la prima alla seconda starà come la terza alla quarta , anco la prima a qualunque multiplice della seconda starà come la terza all' egualmente multiplice della quarta . Cioè la prima a 4. , o 9. , o 20. , ec. delle seconde , starà come la terza a 4. , o 9. , o 20. , ec. delle quarte .

*Supp.
ancora
dal Tor.
nel suo
Libro*

*delle
Propor.*

*ed è la
Propos.
7. del V.
Lib. d'
Euclid.*

III.

Le grandezze omogenee uguali ad un' altra qualunque terza hanno la medesima proporzione .

Siccome la medesima terza grandez-

dezza all' eguali ha la medesima proporzione . IV.

Le grandezze omogenee disuguali ad un' altra qualunque terza omogenea non hanno la medesima relazione , o proporzione , ma diversa .

E la proporzione della maggior grandezza alla terza , in vigor dell' 8. definizione , si dirà maggiore della proporzione della minor grandezza alla medesima terza .

Supp. dal Galileo ed ancora dal Tor. nel detto Libro ed è la prima parte della prop. 8. del V. d' Euclid.

V.

Se una di due proporzioni simili , cioè uguali , è uguale , o maggior , o minor d' una terza proporzione , l' altra ancora farà uguale , o maggior , o minor della medesima terza proporzione . E pel contrario ,

Questo è in parte la Prop. 13. del V. d' Euclid.

Se una proporzione farà uguale , maggior , o minor d' una di due proporzioni simili , la medesima farà ancora uguale , o maggior , o minor della rimanente proporzione .

Il presente Affioma corrisponde a quella comune notizia, la quale è, che se una di due grandezze uguali, è uguale, o maggior, o minor d'una terza, ancora l'altra sarà uguale, o maggior, o minor della medesima terza. Ed all'incontro,

Se una medesima terza sarà uguale, o maggior, o minor d'una di due altre, sarà anch' uguale, o maggior, o minor della rimanente.

Affiom.

VI.

*supposto
ancora*

Quelle proporzioni, che sono simili ad una medesima proporzione, in detto son anco simili fra di loro, ed all' incontro,

*delle
propor.*

Quelle proporzioni, alle quali è ed è la simile una medesima proporzione, sono simili fra di loro.

*Propos.
11. del*

V. d' Euclid. Questo corrisponde all' Affioma, che quelle grandezze, che son' uguali ad una medesima, son anco uguali fra loro.

E quelle, alle quali una medesima grandezza è uguale, pur fra loro son uguali.

VII.

Quelle grandezze, che ad una medesima grandezza hanno la medesima pro-

proporzione ; sono fra loro uguali ; *Affiom.*
E pel contrario , *suppost.*

Quelle grandezze , alle quali una *ancora*
medesima grandezza ha la medesima *dal Tor.*
proporzione , similmente sono ugua- *nel det-*
li fra loro .. *to suo*
lib. ed

VIII.

Se la minor di due proporzioni *è la 9.*
disuguali sarà maggior d' una terza *Propos.*
proporzione , la maggior di esse due *del V.*
proporzioni sarà molto maggior del- *d' Euch.*
la medesima terza proporzione ..

Corrisponde questo a quella notizia co-
mune , che se la minor di due grandezze
disuguali sarà maggior d' una terza gran-
dezza , la maggior di esse due sarà molto
maggior della medesima terza .

IX.

Quelle proporzioni , che son com-
poste delle medesime , o d' ugual
numero di proporzioni simili ciascu-
na a ciascuna , son le medesime ;
cioè simili fra di loro .

D O M A N D A .

COncedasi, che date due grandezze omogenee terminate, qual proporzione ha la prima grandezza alla seconda, tale possa averla la seconda ad una terza a quelle omogenea. O pure, che tale possa concepirsi averla una terza di qualunque genere ad un'altra quarta a se omogenea.

Come per esempio, che qual proporzione ha una superficie ad una superficie, o un corpo ad un corpo, o una forza ad una forza, o un tempo ad un tempo, ecc. tal possa immaginarsi, che li abbia quella seconda superficie ad una terza, o una terza superficie ad una quarta, o pure qualunque retta linea terminata ad un'altra, ecc.

Ciò è stato ammesso, e continuamente praticato da Euclide, da Archimede, e da altri Mattematici d'ogni Secolo; anzi dal nostro medesimo Galileo ne' suoi Dialoghi delle due nuove scienze, come cose per lor medesime chiare, e facili da concedersi.

AV.

AVVERTIMENTI.

Qui è da notarfi, che questa Scienza elementare delle Proporzioni s'adatta indifferentemente, comunque occorra, alle grandezze commensurabili fra loro, ed all'incommensurabili, che son quelle, che poc' avanti si definirono.

In oltre, che nelle figure del presente Trattato, tutte le grandezze omogenee, che si vedono espresse in linee, o in superficie, o in corpi, ciascuno può figurarsele rappresentar quali si sieno altre grandezze, o quantità omogenee a beneplacito, come sarebbero di velocità, di tempi, di forze, ec. comunque ne venga il bisogno; essendochè [come si vedrà] niuna delle conclusioni quì dimostrate si restringa più ad un genere di grandezze, che ad un altro; che però questa viene intitolata:

SCIENZA UNIVERSALE

DELLE

PROPORZIONI.



PROPOSIZIONE I.

Prop. 4. del V. degli Elementi dimostr. col Galileo. **S**E faranno quattro grandezze a due a due omogenee, e fra loro proporzionali, e si prendano l'ugualmente moltiplici della prima, e della terza secondo qualsivoglia numero, e l'ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta, pur secondo qualunque numero, anco tali moltiplici faranno fra loro proporzionali.

Sieno date quattro grandezze proporzionali A, B, C, D , di qualunque genere (purchè a due a due sieno tra loro omogenee) cioè, la prima A alla seconda B abbia proporzione simile a quella della terza C , alla quarta D , secondo la dichiarata sesta definizione,

zione, e si prendano le E, F, ugualmente multipli, della prima, della terza A, C, e le G, H, ugualmente multipli della seconda, e della quarta B, D, sempre secondo qualunque numero di molteplicità. Dico che ancora queste multipli sono proporzionali, cioè che la multiplice E della prima alla multiplice G, della seconda ha proporzione simile a quella della multiplice F della terza alla multiplice H della quarta.

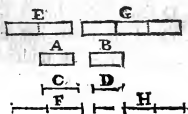
Def.

6. di

questo

Trat.

Def. 4.



Imperciocchè essendo, per supposizione come A a B, così C a D, *sa. 1. Af-*
 rà ancora come E multiplice di A a *sioma.*
 B così F ugualmente multiplice di C
 a D. Similmente perchè ora s'è pro- *2. Af-*
 vato, che siccome sta E a B, così sta *sioma.*
 F a D, starà ancora come E a G
 multiplice di B, così F ad H ugual-
 mente multiplice di D. Che è quel-
 lo,

lo , che si propose di dimostrare..

*E così vien. provata dal Galileo la 4.
Proposizione del V. d' Euclide .*

C O R O L L A R I O .

Conver- Di quì è , che essendosi dimo-
sa della to , che le proporzioni delle gran-
5. Def. dezzc E , F , (ugualmente multi-
del V. plici della prima , e della terza A ,
degli C) alle G , H . (ugualmente mul-
tlemen- tiplici della seconda , e della quar-
ti dimo- ta B , D sono simili fra di loro , è
str. col segno , che se la multiplice E è u-
Galileo. guale alla G anco la multiplice F

Def. farà uguale all' H , e s' ell' è mag-
6. di giore , maggiore , e s' ell' è mino-
ques. re , minore .

Onde ne segue , che mentre sieno
quattro grandezze a due a due omo-
genee , e proporzionali , sempre l'
ugualmente multiplici dell' antece-
denti prima , e terza , s' accordano
con l' ugualmente multiplici delle
conseguenti seconda , e quarta , in
pa-

pareggiare, o in avanzare, o in mancare.

E così vien dimostrato dal Galileo il converso della 5. Definizione del V. d'Euclide.

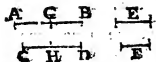
PROPOSIZIONE II.

Se grandezze omogenee quante si vogliano faranno ugualmente multi- *Prop. 1. del V. degli Elementi dimostr. con Euclid.*
plici di altrettante, ciascuna di ciascuna, quante volte è multiplice una di una, altrettante ancora saranno multipli tutte insieme di tutte insieme.

Siano quante si vogliano grandezze omogenee AB , CD , ec. ugualmente multipli d'altrettante E , F , ec. ciascuna di ciascuna, cioè sia la AB multiplice di E , e la CD ugualmente multiplice di F , ec. Dico che quante volte è multiplice una di una, cioè la AB della E , altrettante è multiplice il composto delle AB , CD , del composto delle E , F .

Poichè essendo AB multiplice di E , come la CD è multiplice di F , quante parti sono in AB uguali ad E , altrettante

Def. 4. altrettante saranno in CD , uguali ad F : e però divise le AB , CD nelle parti uguali alle loro summultiplici, cioè nelle parti AG , GB , e nelle GH , HD , sarà il numero in AB uguale al numero in CD , E perchè AG , è uguale ad E , e CH ad F , ancora le AG , CH , prese insieme saranno uguali alle E , F , insieme prese. E per la medesima ragione; essendo GB uguale ad E , ed HD ad F , ancora le GB , HD insieme prese saranno uguali alle predette E , F , insieme prese.



Quante dunque sono nelle AB le parti uguali alla E , o nella CD l'uguali alla F , altrettante sono nell'insieme prese AB , CD , l'uguali alle prese insieme E , F . Onde quante volte è multiplice la AB della E , o la CD della F , altrettante è multiplice la somma delle AB , CD , della somma delle E , F . Ed in simil maniera

fi

si continuerebbe la dimostrazione, quando oltre alle AB , CD fossero date altre simili quantità multipli d'altrettante secondo il numero della data molteplicità. Se dunque quante si vogliano grandezze omogenee faranno ugualmente multipli d'altrettante, ec. Il che bisognava dimostrare.

E questa è la prova d'Euclide della prima Proposizione del V. Libro.

PROPOSIZIONE III.

Date quattro grandezze a due a *Conv.* due omogenee, ma non proporzio- *della 7.* nali, talmentechè la prima alla se- *Def de- gli Ele-* conda abbia maggior proporzione, *menti* che la terza alla quarta; è possibi- *dimostr.* le prender in qualche modo l'ugual- *col Ga-* mente multipli della prima, e del- *lileo ma* la terza, e della seconda, e della *alquan-* quarta, sicchè la multiplice della *to var.* prima superi quella della seconda, *nella* ma la multiplice della terza non *constru-* superi quella della quarta, anzi le *zione.* sia minore.

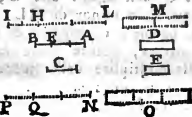
Pon-

Pongasi le date quattro grandezze non proporzionali essere le AB , C , D , E , similmente d'uno stesso qualunque genere, e sia la prima AB , alquanto maggior di quello, che ella dovrebbe essere, per aver alla seconda C proporzione simile a quella, che ha la terza D alla quarta E . Dico esservi modo di prender in certa particolar maniera l'ugualmente multipli della prima, e della terza, ed altre ugualmente multipli della seconda, e della quarta, sicchè quella della prima sia maggior di quella della seconda, ma quella della terza non sia altrimenti maggior di quella della quarta, anzi le sia minore.

Per ottenere ciò, s'intenda esser levato dalla prima quantità AB quell' eccesso, che la fa esser maggior di quella ch'esser dovrebbe per avere a C la medesima proporzione, che a D ad E , e tale eccesso sia FB ; Resteranno per tanto quattro grandezze proporzionali, cioè la rimanente AF , alla C avrà simil proporzione, che ha la D alla E .

In oltre si prendano delle parti BF , FA , l'ugualmente multipli IH , HL ,

HL, con tali condizioni però, che la IH sia assolutamente maggior della seconda grandezza C, e che la HL sia non minore, cioè a dire, o uguale, o maggior della stessa C. (Il che poterfi fare è manifesto, per esser i lor summultiplici BF, FA, quantità dello stesso genere, e terminate; e perciò quando col preso numero d'ugual moltitudine delle BF, FA, mentre



la multiplice HI è maggior di C, la multiplice HL non fosse uguale, o maggior della medesima C, ma rimanesse ancor minore, certo è, che tanto si potrebbe crescere il numero di molteplicità, che la detta HL arrivasse ad esser non minor della C, ed allora tanto più la IH sarebbe maggior della stessa C, come ci fa di bisogno.) Pongasi dunque, che in queste ugualmente moltiplici IH, HL si sieno adempite le suddette condizioni
pre.

pretese, e quante volte esse sono multiple delle parti loro BF , FA , altrettante volte appunto s'intenda presa la grandezza M multiplice della terza grandezza D .

Ed essendosi presa l' HL non minor di C , si multiplichì C tanto, che basti a superare HL , e sia tal multiplice la PN , cioè prossimamente maggior dell' HL , sicchè levandole una sola parte PQ dell' uguali alla C , resti QN uguale, o minor di HL , ovvero HL uguale, o maggior di QN .

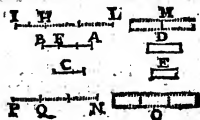
Per ultimo, quante volte la NP s'è presa multiplice della seconda C , altrettante si ponga la O , multiplice della quarta E ,

Ora essendosi presa l' HL assolutamente maggior della C , ovvero della PQ , e la HL sarà uguale, o maggior della QN , sarà tutta insieme la HL assolutamente maggiore di tutta la PN . Il che si abbia a memoria.

E perchè le quattro grandezze AF , C , D , E , si ridussero proporzionali, e della prima AF , e della terza D , si presero le HL , M , ugualmente multiple, e della seconda C , e della quarta E , le ugualmente multiple PN , O , la multiplice M s'accorderà.

rà colla O, come la HL colla PN, ma la HL è minore della PN (perchè si prese PN multiplice di C, e prossimamente maggiore di HL) adunque anco la M sarà minore della O. Finora dunque si è provato, che IL è maggiore assolutamente di PN, e che M è minore di O.

*Coroll.
della 1.
Propos.
di ques.*



Finalmente essendo IH multiplice di BF come è HL di FA, e come M di D, sarà il composto IL multiplice del composto BA come HL di FA ; ovvero come M di D : sicchè IL, ed M sono ugualmente multipli delle grandezze date prima, e terza AB, D, ed anco PN, ed O sono egualmente multipli dell'altre date seconda, e quarta C, E. Ma poco sopra dimostrammo IL maggiore della PN, e dipoi concludemmo la M esser minore della O : adunque si è fatto vedere, che quando la prima grandez-

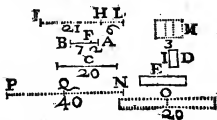
*Prop. 2.
di ques.*

dezza AB è maggiore del bisogno per aver alla seconda C proporzione simile a quella della terza D alla quarta E , si può pigliare in qualche maniera l'ugualmente moltiplici IL , ed M , delle AB , D , prima, e terza, e l'ugualmente moltiplici PN , ed O , delle C , E , seconda, e quarta, che la moltiplice della prima superi la moltiplice della seconda, ma la moltiplice della terza non superi la moltiplice della quarta; poichè si è quì dimostrato, che IL supera PN , ma che non già M supera O , anzi che è minore. Il che si propose per possibile a farsi.

E in tal maniera vien dimostrato dal Galileo il converso della 7. definizione del V. d'Euclide.

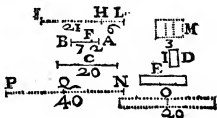
Ma affinchè nella passata proposizione si dimostrasse con ogni maggiore evidenza la possibilità di prender l'ugualmente moltiplici della prima, e della terza grandezza, e quelle della seconda, e della quarta nella maniera proposta dal Galileo, e che avesse luogo, ed uso la comandata costruzione di prendere la PN moltiplice della seconda C in modo, che sempre ella fosse prossimamente maggiore della HL [la qual fu presa tanto moltiplice dell'avan-

dell' avanzo AF, quanto IH dell' eccesso FB] stimai ben fatto variare alquanto la costruzione da quella, che nel seguente Dialogo del Galileo si vedrà distesa. Imperciocchè, se, dopo aver presa la IH multiplice dell' eccesso BF talmente, che ella superi C, ne accadesse, com' in effetto accader può, che HL presa altrettanto multiplice di FA, fosse non ostanto



minor di C, allora la minima multiplice, di C, che è la dupla, anzi ogni grandezza eguale a C supererebbe HL, nè perciò vi sarebbe modo di pigliar la NP multiplice di C prossimamente maggiore di HL, dalla quale [tolta poi una parte PQ uguale a C] rimanesse QN, uguale, o minore di HL. Percchè nel caso, che la multiplice NP fosse dupla di C, tolta una parte PQ, vi resterebbe QN, che è uguale a C, ancor maggiore di HL: e nel caso, che NP fusse
ugua-

uguale a C, toltane una parte, non vi rimarrebbe cosa alcuna: che però dopo aver presa la IH multiplice di BF, e maggiore di C, non sempre si potrebbe continuare la dimostrazione con dire IH è maggiore di C, ovvero di PQ, ed HL è maggiore di QN, adunque tutta IL è maggiore di tutta la PN; perchè tal volta potrebb' esser il composto IL uguale al composto PN, e tal volta minore, come apparisce nell' esempio di questa figura.



A voler dunque concludere, com' è il bisogno, che tutta IL sia maggior di tutta PN è necessario, che non solo IH multiplice di BF sia presa maggior di C, ovvero di PQ, ma ancora che HL sia maggiore, o uguale, cioè non minor di C, perchè così essendo, si potrà ancora prendere NP multiplice di C, e prossimamente maggiore di HL, e col finiro la comandata costruzione, dimostrar poi quivi la proposta, che s' è veduta.

PROPOSIZIONE IV.

Se, di quattro grandezze date a due a due omogenee, l'ugualmente multipli-
 cifici dell' antecedenti prima, e terza prese secondo qualunque nu-
 mero s' accorderanno sempre nel pa-
 reggiare, o mancare, ovvero eccede-
 re l'ugualmente multipli-
 cifici rispettivamente delle conseguenti seconda,
 e quarta prese similmente secondo
 qualunque numero, tali grandezze
 faranno fra loro proporzionali.

5. Def. del V. degli Elementi cioè Conver. del Corol. della prop. 1. di quest. di Mos. dal Galil.

Sieno le date grandezze A prima, e B seconda d'un medesimo qualunque genere, e C terza, e D quarta, pur tra loro d'uno stesso qualunque genere, e delle A, C, s'intendano prese l'ugualmente multipli-
 cifici secondo qualsiasi numero, e delle B, D, ancora l'ugualmente multipli-
 cifici secondo qualunque numero. Dico che se la
 moltiplice della grandezza A è sem-
 pre concorde alla moltiplice della B,
 come la moltiplice della C colla mul-
 tiplice della D nel pareggiare, o nel
 mancare, ovvero nell' eccedere; tali

Tomo II.

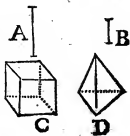
C

gran.

grandezze son tra loro proporzionali, cioè che A a B sta come C a D .

Imperciocchè, se è possibile, sieno non proporzionali. Adunque una dell' antecedenti sarà maggior di quel, che ella dovrebbe per avere alla sua conseguente proporzione simile a quella dell'altra antecedente alla sua conseguente.

Sia per esempio l' antecedente A maggiore del bisogno: dunque si potranno pigliare dell' antecedenti A , C , l' ugualmente multipli in una tal ma-



niera, ed anco delle conseguenti B , D , nel modo insegnato, che il multiplice di A sia maggior del multiplice di B ma il multiplice di C non sia maggiore; anzi minore del multiplice di D ; ma questo è totalmente contro 'l supposto che è, che tali multipli sieno sempre concordi, ec. Adunque A non è maggior del bisogno, ne anco C , per le stesse ragioni. Onde A a B sta come C a D , cioè queste date grandezze son tra loro proporzionali. Il che bisognava dimostrare.

Ed

Ed in tal maniera vien provata dal Galileo, come Teorema, la 5. definizione del V. d' Euclide stimata fin' ora non aver in se l'evidenza degli altri principj Geometrici: onde per l'uso della definizione suddetta in alcune Proposizioni, sì di questo libro, come del sesto, dell'undecimo, e del duodecimo, ed in altre ancora d'Archimede, di Pappo, e di tutti gli altri Geometri [che per dimostrare la proporzionalità fra quattro grandezze, si vogliono dell'egualmente multipli] non dovranno gli Studiosi incontrar per l'avvenire alcuna difficoltà.

PROPOSIZIONE V.

Se di quattro grandezze date, a due, a due omogenee, prese l'ugualmente multipli dell'antecedenti prima, e terza secondo qualche numero, e prese in qualche maniera l'ugualmente multipli delle conseguenti seconda, e quarta, il multiplice della prima avanzerà il multiplice della seconda, ma quel della terza non avanzerà quel della quar-

7. Def.
del V.
degli
Elem.
cioè
Conv.
della 3.
Propos.
di ques.
dimostr.
col Ga-
lileo.

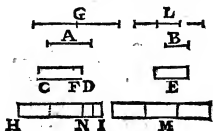
ta ; le date quattro grandezze non faranno proporzionali , ma in senso dell' ottava definizione di questo , la prima alla seconda avrà maggior proporzione , che la terza alla quarta .

Sieno le quattro grandezze date A prima , e B seconda d' uno stesso qualunque genere ; CD terza , ed E quarta pur di uno qualunque genere , e suppongasi , che prese in qualche maniera le G , HI ugualmente multipli dell' antecedente A , CD , e le L , M ugualmente multipli delle conseguenti B , E , si trovi , che la G moltiplice di A sia maggior della L moltiplice di B , ma che la HI moltiplice di CD non sia maggior della M moltiplice di E . Dico , che le A , B , CD , E , non sono proporzionali , ma che A a B ha proporzione maggiore di CD ad E , cioè che , in senso dell'ottava definizione , A è maggiore di quello , che ella dovrebbe essere per avere alla B la medesima proporzione , che ha la CD alla E .

Se è possibile , non sia A maggior del dovere : adunque , o ella sarà precisamente proporzionale , o minor del
giu.

giusto per esser proporzionale. Quanto al primo, se ella fosse pregiamente aggiustata, e proporzionale colla B, come è la CD colla E, sempre l'ugualmente moltiplici della prima, e della terza sarebbero concordi nel pareggiare, o nel mancare, ovvero nelle eccedere l'ugualmente moltiplici

*Coroll.
della
prima
Prop.*

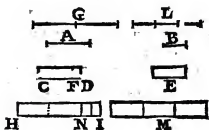


della seconda, e della quarta, ma esse non son concordi, conforme che si è supposto, adunque queste date grandezze non son proporzionali.

Sia ora la A minor del giusto, se possibile è per avere alla B la medesima proporzione, che la CD alla E. Se questo è, dunque segno è, che la terza CD è maggior del giusto per avere alla quarta E simil proporzione della prima A alla seconda B.

S' intenda per tanto levato dalla ter-

za CD l'eccesso DF , che la fa essere maggior del giusto, talmente che la rimanente CF resti appunto proporzionale alla E , come è la A alla B : e dalla HI si prenda la HN multiplice della parte CF , quanto tutta la HI è multiplice di tutta la CD , ovvero quanto è la G multiplice della A ; ma già sono le LM ugualmente multiplici delle B , E , e la CF



*Coroll.
della 1.
Prop.*

alla E si dice stare come la A alla B , adunque la HN multiplice di CF s'accorderà con la M multiplice di E , come la G multiplice di A , colla L multiplice di B , ma G , per supposizione supera L , adunque anco HN , supera M , e l' HI supera HN (perchè CD summultiplice di HI è maggiore di CF summultiplice di HN) adunque tanto più HI supera M ; il che

che è contro il supposto, che fu che G superasse L, ed HI non superasse M. Non è dunque A minor del giusto per avere A a B la proporzione, che ha CD ad E; e sopra si dimostrò ancora essa A non esser proporzionale colla B, come è la CD colla E: adunque A necessariamente è maggiore del giusto, cioè in senso della ottava definizione di questo, A a B ha maggior proporzione di CD ad E. Se dunque di quattro quantità date, ec. il che si doveva dimostrare.

Ed in tal guisa riman provata dal Galileo, come Teorema, la 7. definizione del V. d' Euclide, e rimossa la difficoltà, che arrecava l'uso di essa nella Proposizione ottava del medesimo Libro.

PROPOSIZIONE VI.

Una medesima grandezza alla minor di due altre omogenee disuguali ha maggior proporzione, che alla maggiore.

Sieno due grandezze omogenee disuguali, A maggiore, B minore, e qualunque terza pur ad esse omogenea,

Seconda parte della prop. 8. del V. degli Elem. da me dimostr.

nea, C. Dico che la C alla B ha maggior proporzione, che alla A.

Intendasi altra D uguale alla C.

3. *Ass.* Avrà dunque A a D la medesima proporzione, che A a C.

E perchè A è data maggior di B, è una C terza grandezza ad essa omogenea, avrà A a C, ovvero a D maggior proporzione, che B alla stessa C:

4. e 5. *Assiom.* e però delle A, B, come prima, e terza si potranno pigliare l'ugualmente

multiplici E, G, e delle D, C come seconda, e quarta l'ugualmente

multiplici F, H, tal-

Prop. 3. mente che la multiplice E superi la F, ma la G non superi la H, anzi le sia minore. Sia dunque ciò fatto. E perchè E supera F, e G è minor di H, sarà H maggior di G, F minor di E: sicchè con-

siderate ora C come prima grandezza, B come seconda, D come terza, e A come quarta, essendosi prese le H, F, ugualmente multiplici della prima, e della terza C, D, e le G, E, ugualmente multipli-

A,



A , e provato , che H multiplice della prima C supera G multiplice della seconda B , ma che F multiplice della terza D è minore di E multiplice della quarta A , avrà la prima C alla seconda B maggior proporzione , che la terza D alla quarta A ; ma C , e D sono uguali per costruzione , adunque la sola terza grandezza C alla minore B ha maggior proporzione , che alla A , il che si dovea dimostrare .

E questa è la seconda parte dell'ottava Proposizione del V. d'Euclide da me dimostrata..

PROPOSIZIONE VII.

Di due grandezze , che hanno proporzione ad una terza , quella , che ha maggior proporzione , è maggiore . E quella , alla quale la terza ha maggior proporzione , è minore .

*Propos.
10. degli
Elem.
dimostr.
con Eu-
clid. ed
il con-
verso
dell' 8.
defin. e*

Abbia la grandezza A alla C maggior proporzione , che la B alla C . Dico , che A è maggior di B .

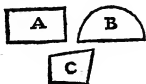
*Propos.
di ques.*

C 5

Im.

Imperciocchè, se A non è maggior di B, farà uguale, o minore.

S'ella fosse uguale avrebbe la A alla C la medesima proporzione, che la di *ques.* B alla medesima C, ma essa l ha maggiore pe 'l supposto, adunque non è A uguale a B.



Se fosse minore A di B, avrebbe 4. *As-* A a C minor proporzione, che B a *sioma.* C, ma l'ha maggiore, pe 'l supposto adunque A non è minor di B: e si è provato non esser uguale, ond' ell' è maggior di B per necessità.

Abbia inoltre C a B maggior proporzione, che ad A. Dico, che B è minor di A.

Imperciocchè se B non fosse minor di A, o sarebbe uguale, o maggiore. 3. *As-* Se uguale, avrebbe C a B la medesima *sioma.* proporzione della stessa C ad A, ma l'ha maggiore, pe 'l dato, dunque non è B uguale ad A.

Se

Se fosse B maggior di A avrebbe C 6. *Prop. 12. del V.*
 a B minor proporzione, che ad A, *posiz.*
 ma l' ha maggiore, pe' l' supposto, non
 è dunque B maggior di A, non è an-
 co uguale ad A, come poco sopra si
 è dimostrato, e però B è necessaria-
 mente minor di A, il che bisognava
 provare.

*E questa è la dimostrazione d' Euclide
 della Proposizione 10. del V.*

P R O P O S I Z I O N E . V I I I .

Se tra le grandezze omogenee, *Prop. 12. del V.*
 quante si vogliano antecedenti saran-
 no proporzionali ad altrettante con- *degli*
 seguenti, ciascuna di ciascuna; co- *Elemen-*
 me è una dell' antecedenti alla sua *ti dimo-*
 conseguente, così faranno tutte l' *str. con*
 antecedenti insieme a tutte insieme *Euclid.*
 le loro conseguenti.

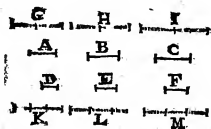
Sieno tra le grandezze omogenee
 quante si vogliano antecedenti A, B,
 C, con altrettante conseguenti D, E,
 F, e ciascuna di ciascuna sia nella
 medesima proporzione, cioè stia A a
 D, come B ad E, e come C ad F.

C 6

Di-

Dico, che la proporzione di una ad una, per esempio di A a D è simile alla proporzione di tutte insieme le A, B, C, a tutte insieme le D, E, F.

Prendanfi le G, H, I, ugualmente multipli quanto si vuole delle A, B, C, e le K, L, M, in qualunque modo pur egualmente multipli delle D, E, F.



Perchè dunque A a D sta come B, ad E, e delle A, B, sono le G, H, ugualmente multipli, ficcome delle D, E, sono ugualmente multipli le

Coroll. K, L, si accorderà la G colla K, della 1. come la H con la L in avanzare, e *Propos.* in mancare, o in pareggiarsi, Per le medesime ragioni sarà concorde H con L come I con M, e per tanto s'accorderanno tutte insieme con tutte insieme.

sieme, come una con una, cioè se G è uguale a H , ancora le G, H, I , insieme prese saranno uguali alle K, L, M , insieme prese; e se G è maggior di K , anco l'insieme G, H, I , faranno maggiori dell'insieme K, L, M , e se è minore, minori. Ma essendo G multiplice di A , come H di B , e come I di C ; la sola G sarà multiplice della sola A , come la somma G, H, I della somma A, B, C ; *Prop. 2.* e per la stessa ragione la K sarà multiplice della D , come la somma K, L, M , della somma D, E, F : ed ora s'è provato, che C multiplice di A s'accorda con K multiplice di D in quel modo, che la somma G, H, I , multiplice della somma A, B, C s'accorda con la somma K, L, M , multiplice della somma D, E, F , adunque la grandezza A alla D sta come la somma A, B, C , alla somma D, E, F . *Prop. 4.* Onde se grandezze omogenee quante si vogliano saranno proporzionali ad altrettante, la proporzione, che è tra una delle antecedenti alla sua conseguente, sarà simile alla proporzione, che è tra tutte l'antecedenti insieme a tutte insieme le conseguenti, il che bisognava dimostrare.

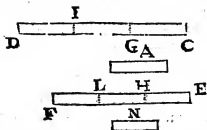
E que.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della Proposizione 12. del V.

PROPOSIZIONE IX.

Propos. 15. del degli Elementi si dimostra con Euclid. Le grandezze omogenee hanno tra loro la medesima proporzione delle loro ugualmente multipli: Cioè le parti stanno fra loro come le ugualmente multipli.

Delle grandezze omogenee A, N , sia la DC multiplice della A , come la FE della N . Dico, che DC ad FE sta come A ad N .



Imperciocchè essendo DC multiplice di A come FE di N , dividendo le DC, FE nelle parti uguali alle A, N , tante parti saranno nella DC uguali ad A , quante nella FE uguali
li

li ad N. Sieno per tanto le parti in DC le DI, IG, GC, ed in FE siano le FL, LH, HE. Essendo dunque ciascuna delle DI, IG, GC uguali ad A saranno quelle uguali tra loro, siccome tutte le FL, LH, HE, tra loro uguali, e però come DI ad FL, così sarà IG ad LH, e così GC ad HE; e come una dell' antecedenti ad una delle conseguenti, così tutte a tutte. Onde come DI ad FL, ovvero come A a N così starà DC multiplice di A ad FE multipli-^{3. Assioma.} ce di N. Adunque le grandezze omogenee summultiplici sono nella medesima proporzione delle loro ugualmente multiplici, il che si dovea dimostrare.

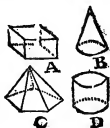
E questa è la prova d' Euclide della Prop. 15. del V. degli Elementi, la quale fors' anco si poteva senza scrupolo riporre fra gli Assiomi, essendo per se stesso manifesto, che qual proporzione, o rispetto, o relazione ha la prima di due grandezze omogenee verso la seconda, tale l' hanno due delle prime verso due delle seconde, e tale tre verso tre, e venti verso venti, ec.

PRO.

PROPOSIZIONE X.

Propos. Se di quattro grandezze omoge-
14. del nec la prima alla seconda avrà la
V. degli medesima proporzione, che la terza
Elemen. alla quarta, e sia la prima maggior
zi dimo- della terza, anco la seconda farà
str. con maggior della quarta, e se è ugua-
Euclid. le, uguale, e se è minore, minore.

Siano quattro gran-
 dezze omogenee A, B,
 C, D, e la prima A
 alla seconda B stia co-
 me la terza C alla quar-
 ta D, e sia la prima
 A maggiore della ter-
 za C. Dico, che an-
 co la seconda B è maggiore della quar-
 ta D; e che se è uguale, uguale, e
 se minore, minore.



4. *Afs.* Poichè, se A farà maggior di C,
sioma. avrà A a B maggior proporzione che
 la C alla medesima B, ma come l'A
 alla B così fu data C a D, adunque
 5. *Afs.* anco C a D ha maggior proporzione
 della medesima C alla B, e però D è
 7. *Prop:* minor di B, cioè B maggior di D.

Ma

LIBRO V. 65

Ma se A sarà uguale a C, avrà l' *3. Ass.*
 A alla B la medesima proporzione della C alla stessa B, ma come A a B *5. Ass.*
 così sta C a D pe' il supposto, adunque anco C a D ha la medesima proporzione della stessa C alla B. Onde la D è uguale alla B, cioè la B alla D. *3. Ass.*

Se finalmente A sarà minor di C, *4. Ass.*
 avrà l' A alla B minor proporzione della C alla medesima B, ma come A a B, così fu posto esser C a D, adunque anco C a D ha minor proporzione della stessa C alla B, sicchè D è maggior di B, cioè la B minor della D. Se dunque di quattro grandezze omogenee la prima alla seconda, ec. il che si dovea dimostrare. *Prop. 6.*

E questa è la prova d' Euclide della Proposizione 14. del V. libro.

PROPOSIZIONE XI.

Sa quattro grandezze a due a due omogenee faranno proporzionali, e convertendole, faranno proporzionali. *Coroll. della 4. Propos. del V. degli Elem. dimostr. con Euclide.*

Sia come A a B d' un medesimo qualunque genere, così C a D pur di un

un solo qualunque genere. Dico, che anco B ad A sta come D a C.

E questo modo d'argomentare dicasi : *Convertendo*.

Coroll.

della 1.

Propos.

Essendosi dimostrato, che di queste quattro grandezze proporzionali A, B, CD, sempre quali si siano ugualmente multipli della prima, e della terza A, C, s'accordano con quali si sieno ugualmente multipli della seconda, e della quarta B, D, in avanzare, o in mancare, o in pareggiarsi, è manifesto, che queste medesime multipli prese conversamente si accorda-



no ancor sempre in mancare, o in avanzare; o in pareggiarsi. E però considerando le quantità B, D, come prima, e terza, e le A, C, come seconda, e quarta, essendochè sempre l'ugualmente multipli di quelle s'accordano coll'ugualmente multipli di queste, avrà la prima B alla seconda A la medesima proporzione, che la ter-

4. *Prop.*

terza D alla quarta C. Laonde se quattro grandezze a due a due omogenee son proporzionali, prese al contrario, ovvero *Convertendo* saranno ancora proporzionali, il che bisognava dimostrare.

E questa è la prova d'Euclide del Corollario della Proposizione 10. del V.

PROPOSIZIONE XII.

Se quattro grandezze omogenee *Prop. 16. del V. degli Elementi dimo-* faranno proporzionali, ancora *per-* mutandole faranno proporzionali.

Sieno le date quattro grandezze omogenee proporzionali A, B, C, D, cioè stia l'antecedente A al suo conseguente B, come l'antecedente C al suo conseguente D. Dico, che ancora l'antecedente A all'antecedente C stia come il conseguente B al conseguente D. *Euclid.*

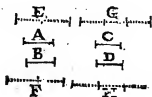
E questo modo d'argomentare dicasi *Permutando*.

Prendanfi delle A, B, l'ugualmente multipli EF, secondo qualunque numero, siccome delle C, D, l'ugualmente multipli G, H, pur secondo qualunque numero. Sta-

Prop. 9. Starà dunque come la moltiplice E all' ugualmente moltiplice F, così la parte A alla B, ma anco C, a D s' è posto esser come A a B, adunque E ad F sta come C a D, ma anco

Prop. 9. la moltiplice G all' H sta come C a D, adunque E ad F sta similmente

5. *Assioma.* come G ad H. Onde se la prima E



Propos. 10. fosse uguale alla terza G, anco la seconda F sarebbe uguale alla quarta H, se maggiore, maggiore, e se minore, minore; sicchè le E, F, convengono con le GH, in avanzare, o in mancare, o in pareggiarsi, ma quelle sono ugualmente moltiplici delle A, B, e queste delle C, D; adunque A a C sta come B a D; e però se quattro grandezze omogenee son fra loro proporzionali, ancora *Permutandole* sono proporzionali.

E questa è la dimostrazione d' Euclide dalla Proposiz. 16. del V. Lib.

AL.

ALTRIMENTI

SENZA L'UGUALMENTE
MULTIPLICI.

Poste le medesime cose. La proporzione di A a C è composta della proporzione di A a B , e della proporzione di B a C , ma come A a B , così si è dato stare C a D , adunque la proporzione di A a C è composta di quella di C a D , e di quella di B a C , ma anco la proporzione di B a D è composta delle medesime proporzioni di C a D , e di B a C ; adunque le proporzioni di A a C e di B a D ; essendo composte di due simili proporzioni, sono simili fra di loro, il sioma. che, ec.

Altra dimostr. aggiunta da me.

Def. 14.

PROPOSIZIONE XIII.

Se quattro grandezze a due a due omogenee faranno composto proporzionali, e dividendole, faranno proporzionali.

Propos. 17. del V. degli Elem. dimostr. con Euclide.

Sieno due grandezze omogenee, e composte insieme AB , BC , ed altre due

due pur omogenee , e composte insieme DE , EF , e sien tra loro proporzionali , cioè come AB a BC così DE , ad EF . Dico , che *dividende* , anco AC a CB sta come DF ad FE .

E questo modo d'argomentare dica-
fi , *Dividendo* , o per la *divisione della*
proporzione .



Prendanfi delle AC , CB , e delle DF , FE , le GH , HI , e le LM , MN , ugualmente multipli di secondo un medesimo qualunque numero ; ed in oltre delle CB , FE si prendano l'ugualmente multipli IO , NP , pur second'uno stesso qualunque numero .

Perchè dunque l'HI è multiplice di CB , come l'MN di FE , il numero delle CB nella HI sarà uguale al numero delle FE nella MN . Similmente , perchè IO è multiplice di CB , come NP di FE ; il numero delle
mede-

medesime CB nella IO sarà uguale al numero delle FE nella NP. Se dunque il numero in HI è uguale al numero in MN, ed il numero in IO al numero in NP, tutto il numero delle CB in HO, sarà uguale a tutto il numero dell'FE in MP. Onde le HO, MP sono ugualmente moltiplici delle CB, FE.

E perchè GH è moltiplice di AC, come HI di CB, sarà il composto GI moltiplice del composto AB, come una di una, cioè come GH di AC, ovvero come LM di DF, cioè come MN di FE, ovvero come il composto LN del composto DE. Ma sta come la prima AB alla seconda BC, così la terza DE alla quarta EF, e della prima, e della terza si son provate ugualmente moltiplici le GI, LN; e della seconda, e della quarta si provaron di sopra ugualmente moltiplici le HO, MP, adunque l'ugualmente moltiplici della prima, e della terza saranno concordi coll'ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta; cioè se GI è uguale ad HO, anco LN sarà uguale ad MP; e se è maggiore, maggiore, e se è minore, minore; onde, tolte le parti

Prop. 2.

Coroll.

della 1.

ti comuni HI, MN, anco il residuo GH s'accorderà col residuo IO, come il residuo LM col residuo NP in pareggiarsi, o in avanzare, o in mancare: e però considerata AC come prima grandezza, CB come seconda, DF come terza, ed FE come quarta, essendosi prese le GH, LM ugualmente multipli della prima, e della terza, e le IO, NP ugualmente multipli della seconda, e della quarta, e di-



mostrato, che quella della prima concorda con quella della seconda, come quella della terza con quella della quarta, starà la prima alla seconda come la terza alla quarta, cioè la AC alla CB come la DF alla FE. E però quando le grandezze sono composte proporzionali, e dividendole son ancora proporzionali, il che, ec.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della Proposiz. 17. del V. Libro.

CO.

C O R O L L A R I O .

Essendosi dimostrato quì in primo luogo , che quando la HI è multi-*Prop. 2.*
 plice della CB , come la MN dell' *del V.*
 FE , e che quando la IO è multi-*degli*
 plice della stessa CB , come la NP *Elem.*
 della medesima FE , il composto *dedotta*
da me .
 HO è multiplice della detta CB ,
 come 'l composto MP della stessa
 FE , si cava , che quando la prima
 è multiplice della seconda , come la
 terza della quarta , e la quinta del-
 la seconda , come la sesta della quar-
 ta , anco il composto della prima ,
 e quinta è multiplice della seconda ,
 come il composto della terza , e se-
 sta , è multiplice della quarta . Il
 che , ec.

*E questa è la dimostrazione della Pro-
 osizione 2. del V. d' Euclide da me de-
 scritta .*

AGGIUNTA I.

Scolio

del Cla-
vio alla

Propos.

17. del

V. degli

Elem.

Dal dimostrato fin qui facilmente si deduce, che quando AB a BC sta come DE ad EF , anco BC a CA sta come EF ad FD .

E questo modo d'argomentare dicasi: *Per divisione contraria di proporzione.*

Propos.

13.

Perchè essendo AB a BC , come DE ad EF , dividendo starà AC a CB come



Propos.

11.

DF ad FE , e convertendo BC a CA starà come EF ad FD , il che, cc.

AGGIUNTA II.

Scolio

del Cla-
vio alla

Propos.

17. del

V. degli

Elem.

Si cava in oltre, che quando BC a BA sta come EF ad ED , anco BC a CA sta come EF ad FD .

E questo modo d'argomentare dicasi: *Per divisione contraria di proporzione.*

Propos.

11.

Perchè essendo BC a BA come EF ad ED , convertendo AB a BC starà come DE ad EF , e dividendo AC

Propos.

13.

a CB come DF , ad FE , e di nuovo convertendo BC a CA starà come

Propos.

11.

EF ad FD , il che, cc.

PRO.

- ne, adunque GE ad EF starà, come DE alla medesima EF , sicchè le GE , DE sono tra loro uguali, onde aggiunta loro di comune la EF ne verrà la GF uguale alla DF , ma come AC a CB , così si pose stare GF ad FE , adunque anco AC a CB sta come DF [che è uguale GF] ad FE . Sicchè se le grandezze divise sono proporzionali, e composte ancora sono proporzionali, il che, ec.

E così vien da me dimostrata la proposizione 18. del V. d'Euclide.

AGGIUNTA I.

Scolio

del Clavio alla Qui può dedursi, che quando AB a BC sta come DE ad EF divisa-
Propos. mente prese, anco CA ad AB sta co-
18. del me FD a DE .

V. degli E questo modo d'argomentare dicasi,
Elemen. per composizion conversa di proporzione.

Propos. 11. Perchè essendo AB a BC come DE ad EF , convertendo anco CB a BA starà come FE ad ED , e componendo CA ad AB starà come FD a DE , il che, ec.

14.

AGGIUNTA II.

Similmente si ha, che quando AB a BC divisamente sta come DE ad EF; ancora AB ad AC sta come DE a DF.

E questo modo d'argomentare dicasi, per composizione contraria di proporzione.

Perchè essendo AB a BC, come DE, ad EF, convertendo BC a BA 11. starà come EF, ad ED e componendo CA ad AB starà come FD a DE, 14. e di nuovo convertendo AB ad AC starà come DE a DF. Il che, ec. 11.

E questo è lo Scolio del Clavio alla Prop. 18. del V. degli Elementi.

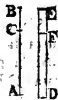
PROPOSIZIONE XV.

Coroll.

Se quattro grandezze a due a due omogenee son composte proporzionali, e per la conversione della proporzione saranno proporzionali.

della
Propos.
19. del
V. degli
Elem.
dimostr.
col Clavio.

Sieno due grandezze composte AB, BC, proporzionali a due altre composte DE, EF. Dico, che anco BA ad AC sta come ED a DF.



D 3

E que-

E questo modo d'argomentare dicasi,
per conversione della proporzione.

Perchè essendo per supposizione AB

Propos. a BC come DE ad EF , dividendo

13. anco AC a CB starà come DF ad

Propos. FE , e convertendo BC a CA come

11. EF ad FD , e componendo BA a

Propos. AC come ED a DF . Onde quando

14. le grandezze son composte proporzio-

nali, anco per conversione della proporzio-

ne son fra loro proporzionali, il che cc.

E così vien dimostrato dal Clavio il Co-
rollario della Prop. 19. del V. d'Euclide.

PROPOSIZIONE XVI.

Propos. Se nelle grandezze omogenee sarà

19. del
V. degli come tutta a tutta così la parte

Elem. levata dall'una alla parte levata

dimostr. dall'altra, la rimanente alla rima-

con Eu- nente starà come tutta a tutta, o

clide. come la levata alla levata.

Sia come tutta la grandezza AB a

tutta la CD del medesimo genere,

così la parte levata BE alla parte le-

vata DF . Dico, che la rimanente

AE alla rimanente CF sta pure come

tut-

tutta la AB a tutta la CD, o come la parte BE alla parte DF.

Impèreiocchè essendo per supposizione, come AB a CD, così BE a DF, sarà permutando AB a BE come CD a DF, e dividendo AE ad EB come CF ad FD, e di nuovo permutando la rimanente AE alla rimanente CF sarà come la parte levata EB alla parte levata FD, ovvero come tutta la AB a tutta la CD.

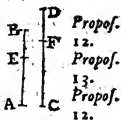
Se dunque sarà come tutta a tutta, così la parte levata alla parte levata, anco la rimanente alla rimanente sarà come tutta a tutta, o come la parte levata alla levata, il che si doveva dimostrare.

E quest'è la dimostrazione d'Euclide della Proposizione 19. del V. Libro.

PROPOSIZIONE XVII.

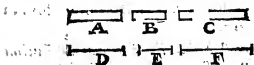
Se faranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur tra loro omogenee, e le coppie corrispondenti di ciascun ordine sieno proporzio-

D + nali,



Propos. 20. del V. degli Elem. dimostr. con Euclide. nali, e sia la prima d' un' ordine maggiore della sua terza, sarà anco la prima dell' altr' ordine maggior della sua terza; e se è uguale, uguale; e se è minore, minore.

Sieno tre grandezze A, B, C, omogenee d' un ordine, ed altrettante D, E, F, omogenee d' un altro, e sia come la prima A alla seconda B, così la prima D alla seconda E, e come la seconda B alla terza C, così la seconda E alla terza F, e sia in primo luogo A maggior di C. Dico, che ancora D maggior di F.



4. *Assioma.* Imperciocchè essendo la prima A posta maggior della terza C, la proporzione di A a B si dirà maggiore della proporzione di C a B: ma la proporzione di D ad E è data simile a quella di A a B adunque, anco D ad E ha maggior proporzione di C a B.
- Propos. 11.* E perchè B a C sta come E ad F, e con-

convertendo sta C a B come F ad E ,
 essendo provata la proporzione di D
 ad E maggior di quella di C a B la- 5. *Afs.*
 rà la medesima proporzione di D ad *Prop. 7.*
 E maggior ancora di quella di F ad
 E ; e però sarà la prima D maggior
 della terza F .

Ma se la prima A si porrà uguale
 alla terza C : Dico pure, che la pri-
 ma D è uguale alla terza F .

Perchè, essendo A uguale a C , la
 proporzione di A a B sarà come quel-
 la di C a B , ma come A a B così 3. *Afs.*
 D ad E , per supposizione, dunque
 anco D ad E sta come C a B . E per- 5. *Afs.*
 chè come B a C , così fu data E ad
 F , e convertendo sta come C a B co- *Propos.*
 sì F ad E , starà ancora D ad E co- 11.
 me F ad E , e però anco D sarà u- 5. *Afs.*
 guale ad F .

Se finalmente la prima A si porrà
 minor della sua terza C . Dico, che
 anco la prima D è minor della sua
 terza F .

Imperciocchè essendo dato B a C co-
 me E ad F , ed A a B come D ad *Propos.*
 E , convertendole ancora C a B starà 11.
 come F ad E , e B ad A come E a
 D : ma perchè A si pone minor di
 C , sarà C maggior di A : onde per

D è la

la prima parte di questa dimostrazione essendo la prima C maggior della terza A sarà ancora la prima F maggior della terza D, cioè convertendo, essendo A minor di C sarà anco D minor di F, il che, ec.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della Proposizione 20. del V. Libro.

PROPOSIZIONE XVIII.

Propos. 22. del V. degli Elem. dimostr. con Euclide: Se faranno quante si vogliano grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e le coppie ordinatamente corrispondenti di ciascun ordine sieno tra loro nella medesima porzione, ancora per l'egualità ordinata faranno proporzionali, cioè la prima del prim'ordine all'ultima sarà come la prima del secondo all'ultima.

Di due ordini dati d'ugual numero di grandezze omogenee sia l'uno A, B, C, D, e l'altro E, F, G, H, e sia la coppia A, B, proporzionale alla E, F, la B, C, alla F, G; e la C, D, alla

alla G, H. Dico, che la prima grandezza A all'ultima D sta come la prima E all'ultima H.

E questo modo d'argomentare dica-
si, *per l'egualità in proporzione ordinata*.

Si considerino prima le tre prime grandezze A, B, C, del primo ordi-
ne, e le tre prime E, F, G, del se-
condo: e delle due omologhe A, E,



s'intendano prese qualunque ugualmen-
te multipli L, M; siccome dell'o-
mologhe B, F, qualunque egualmen-
te multipli N, O; ed anco delle C,
G, quali si sieno ugualmente multi-
plici P, Q.

E perchè la grandezza A alla B si
pone stare come E ad F, e delle A, E,
sono egualmente multipli le L, M, *Prop. 1.*
e delle B, F, egualmente multipli
le N, O, starà ancora L ad N come
D a M ad

M ad O. E per la medesima ragione N a P starà come O a Q. Sono dunque tre grandezze L, N, P, d'un ordine, e tre M, O, Q, d'un altro, ed a coppia a coppia si son provate proporzionali; e però se la prima L supererà la terza P, anco la quarta M, *Prop. 1.* supererà la sesta Q, e se sarà uguale, uguale, e se minore, minore; ma le L, M, son prese egualmente multipli- ci delle A, E, come prima, e terza; e le P, Q, delle C, G, come seconda, e quarta; e s'è ora provato, che la multiplice L della prima s'accorda colla multiplice P della seconda come la M della terza colla Q della quarta in avanzare, o in mancare, o in parreggiarsi: adunque starà la prima alla *Prop. 4.* seconda, come la terza alla quarta, cioè la A alla C come la E alla G.

Considerando poi le tre A, C, D, e le tre E, G, H; Essendo ora provato, che A a C sta come E a G, e stando, per supposizione, C a D come G ad H, nel modo, che s'è dimostrato delle tre A, B, C, e delle tre E, F, G, che la prima all'ultima sta come la prima all'ultima, nel medesimo si proverà delle tre A, C, D, e delle tre E, G, H, che A a D sta
come

come E ad H. E se rimanessero altre date grandezze in questi ordini, si continuerebbe la dimostrazione nel modo stesso. E però quando in due ordini d' ugal numero di grandezze omogenee le coppie corrispondenti sono



proporzionali, la prima grandezza all' ultima del prim' ordine sta per l' uguaglianza in proporzione ordinata come la prima all' ultima del secondo ordine, il che si doveva, ec.

E questa è la dimostrazione d' Euclide della Prop. 22. del V. Libro.

ALTRIMENTI.

SENZA L' UGUALMENTE
MULTIPLICI.

*Agg.
da me.*

Date le medesime cose. La proporzione della prima A all' ultima D è composta di

- Propos. 14.* di tutte le proporzioni di mezzo di A a B di B a C di C a D . Similmente la proporzione della prima E all'ultima H è composta di tutte le proporzioni di mezzo tra E , ed F , tra F , e G , tra G , ed H , ma nel prim' ordine le proporzioni componenti son le medesime, cioè simili alle proporzioni componenti nel secondo, ciascuna a ciascuna ordinatamente, adunque anco le proporzioni composte di esse saranno simili fra di loro, cioè la prima A all'ultima D starà come la prima E all'ultima H .

PROPOSIZIONE XIX.

Prop. 13.

*del V. de-
gli Elem.*

dem. str.

senza le

moltipli-

ci, e sen-

za la

Pr p 21.

d' Eucl.

secondo

la Prop.

11. de'

Tratt.

delle Pro-

porz. del

Terric.

Se saranno tre grandezze tra loro omogenee, ed altrettante pur tra loro omogenee, e le coppie di ciascuna con un' ordine sieno proporzionali, ma prese con ordine perturbato: ancora per l'ugualità perturbata saranno proporzionali.

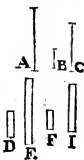
Sieno tre grandezze omogenee A , B , C , ed altrettante tra loro omogenee D , E , F , che a due a due sieno nella medesima proporzione, ma con ordine perturbato, cioè A a B stia come E ad F , e B a C come D ad E .

Dico „

Dico, che ancora A a C sta come D ad F.

E questo modo d'argomentare dicasi, per l'uguaglià in proporzione perturbata.

Immaginiamoci esser come B a C, ovvero come D ad E (che per supposizione ha la medesima proporzione di B a C) così F



Per la domanda di questo.

Saranno dunque le quattro grandezze D, E, F, I, proporzionali.

E perchè sta come A a B, così E ad F, per supposizione, e come B a C, così F ad I, per costruzione, sarà per l'uguaglià in proporzione ordinata, A a C, come E ad I. Ma per

esser le D, E, e le F, I quattro grandezze proporzionali starà permutando D ad F come E ad I; ma ancora A a C s'è provato stare come E ad I, 12.

adunque la proporzione di A a C è la medesima, che di D ad F convenendo l'una, e l'altra colla proporzione di E ad I. E però se saranno tre grandezze omogenee, ed altrettante, ec. il che si doveva dimostrare.

E così dal Tarricelli viene dimostrata la Propos. 3. del 7. d. Euclideo. A L

ALTRIMENTI.

SENZA LA COSTRUZIONE.

La proporzione di A a C si compone della proporzione di A a B, ovvero di E ad F, e di B a C, ovvero di D ad E; ma anco la proporzione di D ad F si compone delle medesime proporzioni di E ad F, e di D ad E, adunque la proporzione di A a C è simile alla proporzione di D ad F, essendo l'una, e l'altra composta delle medesime proporzioni.

Propos. 21. del V. degli Elemen. dedotta da me, come Coroll.

C O R O L L A R I O.

Dall'esserfi dimostrato, che A a C sta come D ad F, si deduce, che le saranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, che a due a due sien proporzionali con proporzione perturbata, e che per l'ugualità, sia la prima maggior della terza nel suo ordine, anco la quarta sarà maggior della sesta nel suo, e se uguale, uguale, e se minore, minore. Poichè proprietà delle

le

le proporzionali è fra l'altre, di accordarsi fra loro i termini omologhi ad esser uguali, o maggiori, o minori.

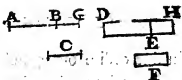
E così vien provata da me la Proposizione 21. del V. d'Euclide.

PROPOSIZIONE XX.

Se in due ordini omogenei di grandezze, la prima alla seconda nel prim' ordine avrà la medesima proporzione, che la terza alla quarta nel secondo, e la quinta alla sesta nel primo la medesima, che la sesta alla quarta nel secondo, ancora il composto della prima, e quinta alla seconda del primo avrà la medesima proporzione, che il composto della terza, e sesta alla quarta del secondo.

Sia nel prim' ordine di grandezze omogenee la prima AB alla seconda C come nel secondo di omogenee la terza DE alla quarta F, e la quinta BG

BG alla seconda C, come la sesta FH alla quarta F. Dico, che il composto della prima, e quinta AB, BG alla seconda C sta come il composto della terza, e sesta DE, EH alla quarta F.



Prop. 11. Imperciocchè essendo BG a C, come EH ad F, sarà convertendo C a BG come F ad EH. E perchè AB

Prop. 18. a C sta come DE ad F, per la supposizione, e C a BG sta come F ad EH; per lo dimostrato sarà per l'uguaglianza in proporzione ordinata AB a

Prop. 14. BG come DE ad EH, e componendo AG a GB come DH ad HE, e sta GB a C come HE ad F, per la

Prop. 18. supposizione; adunque di nuovo per l'uguaglianza AG a C starà come DH ad F. Se dunque la prima alla seconda ha la medesima proporzione, ec. il che si doveva dimostrare.

E quest'è la dimostrazione d'Euclide della Prop. 24. del V. Libro.

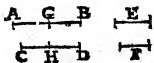
PRO-

PROPOSIZIONE XXI.

*Propos.
25. del
V. degli
Elem.
dimostr.
con Eu-
clide.*

Se quattro grandezze omogenee son
proporzionali, la massima, e la mi-
nima di esse prese insieme, son mag-
giori delle due rimanenti insieme.

Sien le quattro grandezze omogenee
AB, CD, E, F, e sia come AB
a CD, così E ad F, e sia la AB la
massima tra esse, ed F la minima. Di-
co, che la somma delle AB, F, è
maggior della somma delle CD, E.



Tagliasi dalla AB la grandezza AG
uguale ad E, e dalla CD la CH u-
guale ad F.

Sarà dunque la AG alla CH come
E ad F, ovvero come AB a CD,
per la supposizione. Perchè dunque
tutta la AB, a tutta la CD sta co-
me la parte levata AG, alla levata
CH, sarà ancora tutta la AB a tut-
ta la

Propos.
16.

ta la CD come la rimanente GB alla rimanente HD . Ma tutta la AB è maggior di tutta la CD (per essersi posta AB la massima) adunque la rimanente GB sarà maggior della rimanente HD . E perchè AG , ed E sono uguali, aggiungendo loro le uguali F , CH , cioè la F alla AG , e la CH alla E , ne verranno le AG , ed F insieme, uguali alle E , CH insieme: onde aggiunta alla prima somma la maggiore GB , ed alla seconda somma la minore HD , ne verranno le AB , ed F insieme, maggiori delle CD , ed E insieme, cioè la massima colla minima maggiore delle due rimanenti insieme. Se dunque faranno quattro grandezze proporzionali, ec. il che si doveva dimostrare.

E quest'è la dimostrazione d'Euclide della Prop. 25. del V. Libro.

Il fine degli elementi d'Euclide
della Scienza Universale
delle Proporzioni.

A V V E R T I M E N T O .

Fin què si son posti tutti i Teoremi del V. Libro dategli da Euclide, eccettuatine

tine il terzo, il quinto, e il sesto intorno alle ugualmente moltiplici, i quali, per esser Lemmi d'altri quì diversamente provati, e non aver uso altrove, c'è parso ben di tralasciare come inutili. Ma perchè alcuni degli Interpreti d'Euclide conobbero, che per l'intelligenza d'Archimede, d'Apollonio, e d'altri gravi Autori Classici era necessaria la cognizione ancora d'altre Proposizioni supposte da essi, come se note fossero per mezzo degli Elementi, e queste per la maggior parte furono poi dimostrate da Pappo Alessandrino, e altre dal Campano; perciò i medesimi Interpreti le aggregarono al numero di quelle del V. Libro. Di quì è, che noi ancora [affinchè per la Scienza più Elementare delle Proporzioni non s'abbia da ricorrere ad altro Autore] non mancheremo di aggiungerle, dimostrandole come fanno essi Pappo, e Campano, ma coll'ordine tenuto dal Padre Clavio, diligentissimo, e dottissimo Comentatore di tutti gli Elementi d'Euclide.

PROPOSIZIONE XXII.

Se la prima alla seconda avrà ^{Prop. 7.} ^{del 7. di} maggior proporzione, che la terza ^{Pappo.} alla

alla quarta, convertendo, la seconda alla prima avrà minor proporzione, che la quarta alla terza.

Abbia la grandezza A alla B maggior proporzione della C alla D. Dico, che convertendo la B al-

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$$

la A ha minor proporzione, che la D alla C.

Intendasi, che altra grandezza E alla B stia come la C alla D: sarà dunque la proporzione di A a B maggiore ancora della proporzione di E a B;

Prop. 1. o. però sarà la A maggiore di E. Onde B ad A avrà minor proporzione

Prop. 6. di B ad E; ma come B ad E così sta convertendo D a C [perchè come C a D, così sta per costruzione E a B] adunque anco la proporzione di B ad A è minore, che la proporzione di D a C. E però quando la prima alla seconda, ec. il che si doveva dimostrare.

5. *A/s.*



PRO.

PROPOSIZIONE XXIII.

Se la prima alla seconda avrà *Prop. 5.*
 maggior proporzione, che la terza *del 7. di*
 alla quarta, permutando, la prima *Pappo.*
 ancora alla terza avrà maggior pro-
 porzione, che la seconda alla quarta.

Abbia A a B mag-
 gior proporzione, che $\frac{A}{B}$ $\frac{C}{D}$
 C a D. Dico, che
 permutando ancora A $\frac{A}{E}$
 a C ha maggior pro-
 porzione di B a D.

Imperciocchè s'intenda, che un'al- *Per la*
 tra E a B sia come C a D. Sarà *daman-*
 dunque la proporzione di A a B mag- *da di*
 giore ancora della proporzione di E a *questo*
 B, e però sarà A maggior di E; ed *Tratt.*
 A a C avrà maggior proporzione, che
 E a C. E perchè sia permutando *Prop. 7.*
 E a C come B a D (essendosi posto,
 che E a B sia come C a D) sarà *4. Ass.*
 dunque ancora la proporzione di A a
 C maggior, che di B a D, il che, ec. *5. Ass.*

PRO.

PROPOSIZIONE XXIV.

Prop. 3.

del 7. di

Pappo.

Se, dividendo, la prima alla seconda, avrà maggior proporzione, che la terza alla quarta, e componendo, anco la prima colla seconda alla seconda avrà maggior proporzione, che la terza colla quarta alla quarta.

Sia la proporzione di AB a BC maggior della proporzione di DE ad EF . Dico, che componendo anco la proporzione di AC a CB , è maggior della proporzione di DF ad FE .

Per la

doman-

da di

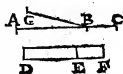
questo

Tratt.

5. Ass.

Prop. 7.

Intendasi, che un'altra GB alla BC stia come DE ad EF . Sarà dunque la proporzione di AB a BC maggiore similmente della proporzione di GB a BC , e però sarà AB maggiore di GB ; sicchè aggiunta a queste la comune BC , ne verrà AC maggiore di GC : onde AC a CB avrà maggior proporzione, che GC alla medesima GB : ma componendo GC a CB sta



4. Ass.

come

come DF ad FE, perchè si pose dividendo GB a BC come DE ad EF; adunque anco la proporzione di AC a BC farà maggiore della proporzione di DF ad FE. E però dividendo la prima alla seconda avrà maggior proporzione, che la terza alla quarta, e componendo, ec. il che si propose di dimostrare. 5. *Afs.*

PROPOSIZIONE XXV.

Se, componendo, la prima colla seconda alla seconda avrà maggior proporzione, che la terza colla quarta alla quarta, e dividendo, avrà ancora la prima alla seconda maggior proporzione, che la terza alla quarta. *Propos. aggiunt. e dimostr. dal Comandino dopo la Prop. 5. del 7. di Pappo.*

Abbia, nella passata figura, AC a CB maggior proporzione di DF ad FE. Dico, che ancora dividendo AB a BC ha maggior proporzione di DE ad EF.

Intendasi, che altra GC a CB stia come DF ad FE: ancora AC a CB avrà maggior proporzione di GC a CB. *Domanda di questo Tratt.*

Tomo II.

E

CB;

CB ; e però sarà AC maggior di GC, e tolte di comune la BC, resterà la AB maggior di GB, e però AB

3. *Afs.* a BC avrà maggior proporzione, che

Prop. 7. GB a BC : ma dividendo come GB a BC, così DE ad EF [perchè si

4. *Afs.* pose GC a CB come DF ad FE] adunque anco la proporzione di AB a BC è maggior della proporzione di

5. *Afs.* DE ad EF. E però, se componendo la prima colla seconda alla seconda avrà maggior proporzione, che la terza colla quarta alla quarta, e ancora dividendo, ec. lo che fu proposto di dimostrare.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se componendo, la prima colla

Prop. 6. seconda alla seconda avrà maggior

del 7. us proporzione, che la terza colla quarta

Pappo. alla quarta ; per la conversion della

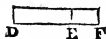
proporzione, la prima colla seconda

alla prima, averà minor proporzione,

che la terza colla quarta alla terza.

Sia la proporzione di AC a CB maggior della proporzione di DF ad FE.

FE. Dico, che per la conversione della proporzione CA ad AB ha minor proporzione, che FD a DE.



Perchè avendo AC a CB maggior *Proposf.*
 proporzione di DF ad FE, e divi- ^{25.}
 dendo AB a BC avra maggior pro-
 porzione di DE ad EF, e però con- *Proposf.*
 vertendo CB a BA avrà minor pro- ^{22.}
 porzione di FE ad ED: perlochè
 componendo CA ad AB avrà minor
 proporzione, che FD a DE, lo
 che, ec.

PROPOSIZIONE XXVII

Se la prima alla terza ha mag- *Prop. 8.*
 gior proporzione, che la seconda ^{del 7. di}
 alla quarta, avrà ancora la prima *Pappo.*
 alla terza maggior proporzione, che
 la prima colla seconda alla terza
 colla quarta.

E 2 Abbia

Abbia AB a DE maggior proporzione, che BC ad EF . Dico, che ancora AB a DE ha maggior proporzione, che AC a DF .

Sia come AB a DE ,

così BC ad un'altra A ————— B C

Dom. di ques. EG . E perchè s'è
posto AB a DE aver D ————— E G F
maggior proporzione

di BC ad EF , anco BC ad EG

5. Ass. (che sta come AB a DE) avrà maggior proporzione, che la medesima

Prop. 7. BC alla EF , onde EG sarà minore

Prop. 8. di EF . Perchè dunque AB a DE sta come BC ad EG , starà AC a

Prop. 6. DG come AB a DE . Ma AC ha maggior proporzione a DG , che a DF (perchè DG è minore di DF)

5. Ass. adunque anco AB a DE l'avrà maggiore, che AC a DF , lo che si era proposto di dimostrare.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Prop. 9. del 7. di Pappo. Se tutta a tutta ha maggior proporzione, che la parte levata alla parte levata, e la rimanente alla rimanente avrà maggior proporzione, che tutta a tutta.

Sia

Sia la proporzione di tutta la AB a tutta la CD maggiore della proporzione della parte levata AE alla parte levata CF . Dico, che anco la proporzione della rimanente EB alla rimanente



FD è maggiore della proporzione di tutta la AB a tutta la CD .

Essendo la proporzione di AB a CD maggiore, che di AE a CF , *Propos.*
 farà ancora permutando la proporzione di AB ad AE maggior, che di CD a CF : e per la conversion della proporzione AB a BE avrà minor proporzione, che CD a DF ; e permutando AB a CD avrà similmente minor proporzione, che EB ad FD : *Propos.*
 cioè la rimanente EB alla rimanente FD avrà maggior proporzione, che tutta la AB a tutta la CD ; lo che, ec.

PROPOSIZIONE XIX.

Se faranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e la proporzione della prima delle prime alla seconda sia maggior della

E 3

pro-

Propof.
 31. *del* proporzione della prima delle fecon-
V. tra le de alla seconda, e la proporzion
aggiun- della seconda delle prime alla terza
te dal fia pur maggiore della proporzion
Campa- della seconda delle feconde alla ter-
no nella za; ancora per l'ugualità in tal
fua tra- duzione
d' Eucl. proporzione ordinata avrà la prima
 delle prime alla terza maggior pro-
 porzione, che la prima delle fecon-
 de alla terza.

Siano tre grandezze omogenee A, B, C, ed altrettante omogenee D, E, F, e la proporzione di A a B sia maggior delle proporzione di D ad E; siccome la proporzione di B a C sia maggior della proporzione di E ad F. Dico, che per l'ugualità ancora A a C ha maggior proporzione di D ad F.

Per la Intendasi, che G a C fia come E
doman- ad F. Sarà dunque la proporzione di
da di B a C, che era maggiore, che di E
questo. ad F, maggiore ancora, che di G a
 5. *Afs.* C. Onde B sarà maggiore di G, e
 7. *Prop.* però A a G avrà maggior proporzio-
 4. *Afs.* ne, che a B: ma la proporzione di
 A a B si è posta maggiore, che di D
 ad E.

ad E, adunque la proporzione di A a G, *Afs.*
a G tanto più sarà maggiore, che
quella di D ad E.



Per la

Intendasi di nuovo, che H a G sia *deman-*
come D ad E. Avrà per tanto A a *da di*
G maggior proporzione, che H a G, *questo.*
e però sarà A maggior di H; sicchè *5. Afs.*
A a C avrà maggior proporzione, che *Prop. 7.*
H alla stessa C, ma come H a C co-
sì è per l'uguaglià D ad F (perchè *4. Afs.*
si fece D ad E come H a G, ed E *Propos.*
ad F come G a C) adunque anco A *18.*
a C l'avrà maggiore, che D ad F, *5. Afs.*
lo che, ec.

PROPOSIZIONE XXX.

Se faranno tre grandezze omoge-
nee, ed altrettante pur omogenee,
e la prima alla seconda nel primo
ordine abbia maggior proporzione,
E 4. che

Propos.

32. *del* che la seconda alla terza nel secon-
V. tra le do, e la seconda alla terza nel pri-
aggiun- mo abbia maggior proporzione, che
te dal la prima alla seconda nel secondo,
Campa- ancora per l'uguaglià in tal propor-
no nella zione perturbata, avrà la prima al-
sua tra- duzione la terza nel prim' ordine maggior
duzione proporzione, che la prima alla ter-
d' Eucl. za nel secondo.

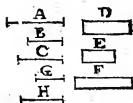
Sieno tre grandezze omogenee A, B, C, ed altre pur omogenee D, E, F; e nel prim'ordine abbia A a B maggior proporzione di E ad F nel secondo; e B a C nel primo abbia maggior proporzione, che D ad E nel secondo. Dico, che anco per l'uguaglià A a C nel primo ha maggior proporzione che D ad F nel secondo.

Dom. di Intendasi, che G a C stia come D
questo. ad E, sarà dunque la proporzione di B a C, che è data maggiore della

5. *Afs.* proporzione di D ad E, maggiore
Prop. 7. ancora della proporzione di G a C :
 Onde B sarà maggiore di G; e però

5. *Afs.* A a G avrà maggior proporzione, che
 la medesima A a B, ma la proporzio-
Affia- ne di A a B è posta maggiore, che
ma. di E

di E ad F, adunque la proporzione di A a G è molto maggiore, che di E ad F.



Intendasi inoltre, che H a G stia *Dom. di* come E ad F. Sarà dunque la pro- *questo.* porzione di A a G maggiore, che di H alla medesima G. Onde A sarà *5. Ass.* maggiore di H, e però A a C avrà *Prop. 7.* maggior proporzione, che H alla medesima C, ma come H a C, così sta *4. Ass.* per l'uguaglià D ad F (perchè si fe- *Propos.* ce D ad E come G a C, ed E ad F *19.* come H a G) adunque anco la pro- *5. Ass.* porzione di A a C è maggiore, che quella di D ad F, lo che, ec.

PROPOSIZIONE XXXL

Se faranno due ordini d'egual numero di grandezze, e tutte omogenee, e la prima del primo ordine

E 5 alla

Propos.
 34. *del* alla prima del secondo abbia mag-
V. aggi- gior proporzione della seconda del
unta dal primo alla seconda del secondo, e
Campa- questa proporzione sia maggior della
no, nella proporzione della terza del primo
sua: tra- alla terza del secondo, e così sem-
duzione pre finchè vi sieno grandezze, tut-
d' Eucl. te insieme l' antecedenti a tutte in-
dimostr. dre Cla- sieme le conseguenti avranno mag-
col Pa- gior proporzione di tutte l' antece-
dre Cla- denti senza la prima, ma però mi-
vio. nor proporzione, che la prima alla
 prima, e maggior, che l' ultima
 all' ultima ..

Sieno prima nel primo ordine tre
 grandezze A, B, C, e nel secondo
 altrettante D, E, F, e tutte omoge-
 nee, e la proporzione di A a D sia
 maggior della proporzionne di B ad
 E, e questa maggiore, che di C ad
 F. Dico, che la proporzione della
 somma A, B, C, alla somma D, E,
 F è maggiore, che della somma B,
 C alla somma E, F. Ma ben minore,
 che della prima grandezza A alla pri-
 ma D.

ma D. E finalmente maggiore , che dell'ultima C. all'ultima F.

Imperciocchè avendo A a D mag- *Propos.*
 gior proporzione di B ad E , permutando avrà maggior proporzione A a *23.*
 B, che D ad E, e componendo A a *Propos.*
 con B a B maggiore, che D con E *24.*
 ad E, e di nuovo permutando A con *Propos.*
 B a D con E maggior proporzione, *23.*
 che B ad E. Perchè dunque tutta A,
 B a tutta la D, E ha maggior pro-
 porzione , che la parte B alla parte E,



avrà ancora la rimanente A alla rima- *Propos.*
 nente D maggior proporzione di tut- *28.*
 ta la A, B a tutta la D, E. Nello
 stesso modo appuato si proverà , che
 la sola B alla sola E ha maggior pro-
 porzione delle due B, C insieme, alle
 due insieme E, F, adunque la sola
 prima A alla sola prima D avrà mol-
 to maggior proporzione, che la som-
 ma B, C alla E, F, e permutando,
 avrà maggior proporzione A a B, C,
 che D ad E, F, e componendo, mag- *Ass. 3.*
 E 6. gior:

F, H, e fieno date con la medefima condizione delle tre, ficchè ancora C ad F abbia maggior proporzione di G ad H. Dico, pure feguirne le fteffe cofe.



Perchè, come fi provò nelle tre, avrà B ad E maggior proporzione della fomma B, C, G alla fomma E, F, H, e però molto maggiore A a D, che B, C, G ad E, F, H; e permutando, maggior proporzione A a B, C, G, che D ad E, F, H, e componendo, maggiore A, B, C, G a B, C, G, che D, E, F, H ad E, F, H, e permutando, maggior proporzione A, B, C, G a D, E, F, H, che B, C, G ad E, F, H.

8. *Afs.*
Propof.
 23.
Propof.
 24.
Propof.
 23.

Effendo dunque la proporzione di tutta A, B, C, G a tutta D, E, F, H, maggior della levata B, C, G alla levata E, F, H, e la rimanente A alla rimanente D avrà maggior proporzione, che tutta A, B, C, G a tutta D, E, F, H.

E final.

E finalmente, come si dimostrò nelle tre ha maggior proporzione la somma B, C, G alla E, F, H, di G, ad H, ed è la proporzione di A, B, C, G a D, E, F, H maggiore, che di B, C, G ad E, F, H, come si provò poco sopra; adunque la somma A, B, C, G alla somma D, E, F, H ha molto maggior proporzione, che l'ultima G all'ultima H, lo che, ec.

8. *Ass.
suma.*

Con simile artificio si concluderà seguirne le stesse cose in cinque grandezze per mezzo delle prime quattro, ed in sei per mezzo delle prime cinque, come appunto s'è provato in quattro per via delle prime tre. E però è manifesto tuttociò, che si propone di dimostrare ..

*Il Fine dell' Aggiunta agli Elementi
di Euclide della Scienza
universale delle Proporzioni ..*



PRIN.

PRINCIPIO
DELLA
QUINTA GIORNATA
DEL
GALILEO
DETTATA
AD EVANGELISTA
TORRICELLI

Da aggiugnerfi all' altre quattro de'
Discorsi, e Dimostrazioni Mate-
matiche intorno alle due nuove
Scienze appartenenti alla Mec-
canica, ed a' Movimenti
locali.



INTERLOCUTORI

Salviati, Sagredo, e Simplicio.

Salv.  Randissima è la consola-
zione, ch' io sento nel
vedere, dopo l'interpo-
sizione di qualche anno, rinnovata in
questo giorno la nostra solita adunan-
za. So, che l'ingegno vivace del Si-
gnor

ignor Sagredo è tale, che non sa stare in ozio, però mi persuado, che egli non avrà mancato di fare, nel tempo della nostra lontananza, qualche riflessione sopra le dottrine del moto, le quali furon lette nell'ultima Giornata de' nostri passati colloquj. Io, che dalla virtuosa conversazione di V. S., ed anco del nostro Sig. Simplicio, ho sempre raccolto frutti di non volgare erudizione, la prego a voler proporre qualche nuova considerazione sopra le cose del nostro Autore già lette da noi. Così daremo principio agli usati discorsi per passar questa Giornata nell'occupazione di virtuoso trattenimento.

Sagr. Non nego a V. S., che in quest'anni mi sieno passati per la fantasia varj pensieri sopra le novità dimostrate da quel buon Vecchio intorno alla sua Scienza del moto, sottoposta, e ridotta da lui alle dimostrazioni della Geometria. Ed ora, poichè ella così comanda, procurerò di rammentarmi qualche cosa, e darò a lei occasione di beneficiare il mio intelletto co' suoi dotti ragionamenti.

Per cominciar dunque per ordine dal principio del Trattato de' moti, pro-

proporrò a V.S. uno scrupolo mio antico, rinnovatomi nel considerare la dimostrazione, che l'Autore apporta nella sua prima Proposizione del moto equabile, la quale procede (come molte altre degli antichi, e moderni Scrittori) per via degli ugualmente multipli. Questa è una certa ambiguità, che io ho sempre avuta nella mente intorno alla quinta, o come altri vogliono, alla sesta definizione del quinto Libro d'Euclide. Stimo mia somma prosperità d'aver potuto incontrare occasione di conferir questo dubbio con V.S., del quale spero dover restare totalmente liberato.

Simpl. Anzi, che io ancora riconoscerò questo nuovo abboccamento colle Signorie Vostre per beneficio singolare della fortuna, se mi succederà di poter ricevere qualche luce intorno a questo punto accennato dal Signor Sagredo. Non ebbi mai il più duro ostacolo di questo in quella poca Geometria, che io studiai già nelle scuole da giovanetto. Però ella s'immagini quanto sia per dovermi esser caro, se dopo tanto tempo sentirò intorno a questo particolare qualche cosa di mia soddisfazione.

Sagr.

Sagr. Dico dunque, che avendo sentito nel dimostrar la prima Proposizione dell'Autore intorno al moto equabile adoprarli gli ugualmente multipli conforme alla quinta, ovvero questa definizione del quinto Libro d'Euclide, ed avendo io un poco di dubbio già antiquato intorno a questa definizione, non restai con quella chiarezza, che io avrei desiderato nella predetta proposizione. Ora mi sarebbe pur caro il poter intender bene quel primo principio, per poter poi con altrettanta evidenza restar capace delle cose, che seguono intorno alla dottrina del moto.

Salv. Procurerò di soddisfare al desiderio di V. S. con addomesticare in qualche altra maniera quella definizione d'Euclide, e spianar la strada, per quanto mi farà possibile, all'introduzione delle proporzionalità. In tanto sappia pure di aver avuti per compagni in questa ambiguità uomini di gran valore, i quali per lungo tempo sono stati colla medesima poca soddisfazione, colla quale V. S. mi dice di ritrovarsi fino a questo giorno.

Io poi confesso, che per qualche anno dopo avere studiato il quinto Libro.

Libro d'Euclide, restai involto colla *Quando*
mente nella stessa caligine. Superai fi- *e con*
nalmente le difficoltà, quando nello *quale*
studiare le maravigliose Spirali d'Ar- *occasione*
chimede, incontrai nel bel principio *ne sou-*
del Libro una dimostrazione simile al- *venisse*
la predetta del nostro Autore. Quell' *al Gali-*
occasione mi fece andar pensando, se *leo que-*
per fortuna ci fosse altra strada più *sta spe-*
agevole, per la quale si potesse arri- *culazio-*
vare al medesimo fine, ed acquistare *ne.*
per me, ed anco per altri qualche pre-
cisa cognizione nella materia delle
proporzioni: però applicai allora l'
animo con qualche attenzione a que-
sto proposito, ed esporrò adesso, quan-
to fu da me speculato in quell' oppor-
tunità, sottoponendo ogni mio pro-
gresso al purgatissimo giudizio delle
Signorie Vostre.

Supponga primieramente (come le
suppose anco Euclide, mentre le defi- *Suppo-*
nì) che le grandezze proporzionali si *sizione.*
trovino; cioè, che date in qualun-
que modo tre grandezze, quella pro-
porzione, o quel rispetto, o quella
relazione di quantità, che ha la pri-
ma verso la seconda, la stessa possa
averla una terza verso una quarta.
Dico poi, che per dare una definizio-
ne:

ne delle suddette grandezze proporzionali, la quale produca nell'animo del Lettore qualche concetto aggiustato alla natura di esse grandezze proporzionali, dovremmo prendere una delle loro passioni, ma però la più facile di tutte, è quella per appunto, che si stima la più intelligibile anco dal Volgo non introdotto nelle Matematiche. Così fece Euclide stesso in molt' altri luoghi. Sovvengavi, che egli non disse, il cerchio essere una figura piana, dentro la quale segandosi due linee rette, il rettangolo sotto le parti dell'altra: ovvero dentro la quale tutti i quadrilateri abbiano gli angoli opposti uguali a due retti. Quand'anche così avesse detto sarebber state buone definizioni. Ma mentre egli sapeva un'altra passione del cerchio più intelligibile della precedente, e più facile da formarne concetto, chi non s'accorge, che egli fece assai meglio a mettere avanti quella più chiara, e più evidente come definizione, per cavar poi da essa quell'altre più recondite, e dimostrarle come conclusioni.

Sage. Per certo, che così è, ed io credo, che rari saranno gl'ingegni, i quali

quali tota'mente s'acquietino a questa definizione, se io con Euclide dirò così :

Allora quattro grandezze sono proporzionali , quando gli ugualmente moltiplici della prima , e della terza , presi secondo qualunque moltiplicità si accorderanno sempre nel superare , mancare , o pareggiare gli ugualmente moltiplici della seconda , e della quarta .

E chi è quello d'ingegno tanto felice , il quale abbia certezza , che allora quando le quattro grandezze sono proporzionali , gli ugualmente moltiplici s'accordino sempre ? Ovvero , chi sa , che quegli ugualmente moltiplici non s'accordino sempre anco quando le grandezze non sieno proporzionali ? Già Euclide nelle precedenti definizioni aveva detto .

La proporzione tra due grandezze essere un tal rispetto , o relazione tra di loro per quanto si appartiene alla quantità .

Ora avendo il Lettore già concepito nell'intelletto , che cosa sia la proporzione fra due grandezze , sarà difficile cosa , che egli possa intendere , che quel rispetto , o relazione , che è fra la prima , e la seconda grandezza , allora sia al rispetto , o relazione , che
si tro-

si trova fra la terza, e la quarta grandezza, quando quelli ugualmente multipli della prima, e della terza s'accordano sempre nella maniera predetta con gli ugualmente multipli della seconda, e della quarta nell'esser sempre maggiori, o minori, o uguali.

Salv. Comunque ciò sia, parmi questo d'Euclide piuttosto un Teorema da dimostrarsi, che una definizione da premetterli. Però avendo io incontrato tanti ingegni i quali hanno arretrato in questo luogo, mi sforzerò di secondare colla definizione delle proporzioni il concetto universale degli uomini, anche ineruditi nella Geometria, e procederò in questo modo.

Defin. Allora noi diremo quattro grandezze esse fra loro proporzionali, cioè aver la prima alla seconda la stessa proporzione, che ha la terza alla quarta, quando la prima sarà uguale alla seconda, e la terza ancora sarà tra loro uguale alla quarta. Ovvero quando la prima sarà tante volte multiplice della seconda, quante volte precisamente la terza è multiplice della quarta. Troverà dubbio alcuno il Sig. simplicio nell'intender questo?

Simpl. Certo che nò.

Salv.

Salv. Ma perchè non sempre accaderà, che fra le quattro grandezze si trovi per appunto la predetta uguaglianza, ovvero molteplicità precisa, procederemo più oltre, e domanderemo al Sig. Simplicio: Intendete voi, che se quattro grandezze allora sieno proporzionali, quando la prima contenga per esempio tre volte, e mezzo la seconda, ed anco la terza contenga tre volte, e mezzo la quarta?

Simpl. Intendo benissimo fin quì, ed ammetto, che le quattro grandezze sieno proporzionali, non solo nel caso esemplificato da Vosignoria, ma ancora secondo qualsivoglia altra denominazione di molteplicità, o superparziente, o superparticolare.

Def. ge.

Salv. Per raccogliere dunque ora in breve, e con maggior universalità tutto quello, che si è detto, ed esemplificato fin quì, diremo, che:

Allora noi intendiamo quattro grandezze esser proporzionali fra loro, quando l'eccesso della prima sopra la seconda [qualunque egli sia) sarà simile all'eccesso della terza sopra la quarta.

o incom-

Simpl. Fin quì io non avrei difficoltà, ma mi pare che Vosignoria in questa

questa

questa maniera non apporti la definizione delle grandezze proporzionali, se non quando le antecedenti faranno maggiori delle loro conseguenti, poichè ella suppone, che la prima ecceda la seconda, e che anco la terza ecceda similmente la quarta. Ma ora interrogo io, come dovrò governarmi quando le antecedenti sieno minori delle loro conseguenti?

Salv. Rispondo, che quando V.S. avrà le quattro grandezze in tal modo, che la prima sia minor della seconda, e la terza minor della quarta, allora farà la seconda maggior della prima, e la quarta maggior della terza. Però V.S. le consideri con quest'ordine inverso, e s'immagini, che la seconda sia prima, e la quarta sia terza. Così avrà le antecedenti maggiori delle conseguenti, e non avrà bisogno di cercare allora definizione diversa dalla già apportata da noi.

Sagr. Così è per appunto. Ma seguiti V.S. per grazia col presupposto già fatto di considerare sempre le antecedenti maggiori delle loro conseguenti, lo che mi pare, che faciliti assai a lei il discorso, ed a noi l'intelligenza,

Salv.

Salv. Stabilita questa per definizione, soggiugnerò anco in qual altro modo s'intendano quattro grandezze esser fra loro proporzionali, ed è questo. Quando la prima per avere alla seconda la medesima proporzione, che la terza alla quarta, non è punto nè maggiore, nè minore di quello, che ella dovrebbe essere, allora s'intende aver la prima alla seconda la medesima proporzione, che ha la terza alla quarta. Con questa occasione definirei ancora la proporzione maggiore, e direi così:

Ma quando la prima grandezza sarà alquanto più grande di quel che ella dovrebbe essere per avere alla seconda la medesima proporzione, che ha la terza alla quarta, allora voglio, che convenghiamo di dire, che la prima abbia maggior proporzione alla seconda di quella, che ha la terza alla quarta.

Simpl. Bene, ma quando la prima fosse minore di quel che ella dovrebbe esser per avere alla seconda quella medesima proporzione, che ha la terza alla quarta?

Salv. Mentre la prima sia minor di quel, che si ricercerebbe per aver

Tom. II.

F

alla

Altro modo di definire le grandezze propor.

Def. delle grandezze non prop. commens.

o incommens.

alla seconda quella medesima proporzione, che ha la terza alla quarta, sarà segno evidente, che la terza è maggior del giusto per aver alla quarta quella tal proporzione, che ha la prima alla seconda. Però in questo caso ancora Vosignoria si contenti di concepir l'ordine in altro modo: s'immagini, che quelle grandezze, che erano terza, e quarta diventino prima, e seconda, e quell'altre, che erano prima, e seconda, Vosignoria le riponga ne' luoghi della terza, e della quarta.

Sagr. Finora intendo benissimo il concetto di Vosignoria, e l'introduzione, colla quale ella dà principio alla speculazione delle proporzionali. Parmi ora, che ella si sia messa in obbligo di adempire una delle due cose, cioè o di dimostrare con questi suoi principj tutto il quinto d'Euclide, ovvero di dedurre da queste definizioni poste da Vosignoria quell'altre due, che Euclide mette per quinta, e per settima, fra le definizioni, sopra le quali poi egli fonda tutta la macchina del medesimo quinto Libro. Se Vosignoria dimostrerà queste come conclusioni non mi resterà più, che desiderare intorno a questa materia.

Salv. Questa per appunto è l'intenzion mia, poichè quando si comprenda con evidenza, che date quattro grandezze proporzionali conforme alla medesima definizione, gli egualmente multipli della prima, e della terza s'accordano eternamente per necessità in pareggiare, o mancare, o eccedere gli egualmente multipli della seconda, e quarta, allora senz'altra scorta si può entrare nel quinto Libro di Euclide, e si possono intender con evidenza i Teoremi delle grandezze proporzionali. Così ancora, se colla posta definizione della proporzion maggiore dimostrerò, che in qualche caso, presi gli egualmente multipli della prima, e della terza, ed anco della seconda, e della quarta, quel della prima ecceda quel della seconda, ma quel della terza non ecceda quel della quarta, si potrà con questa dimostrazione scorrere gli altri Teoremi delle grandezze sproporzionali. Poichè quella nostra conclusione sarà per appunto la definizione, della quale, come per principio, si serve Euclide stesso.

Simpl. Quando io restassi persuaso di queste due passioni degli egualmente

F 2

mul.

multiplici, cioè, che mentre le quattro grandezze son proporzionali, quegli eternamente s'accordano nel pareggiare, o eccedere, o mancare, e che quando le quattro grandezze non son proporzionali, quelli in quel caso discordano, io per me non richiederei altra luce per intender con chiarezza tutto il quinto degli Elementi Geometrici.

Salv. Ora ditemi Signor Simplicio, se noi supporremo, che le quattro grandezze A, B, C,

D, sieno proporzionali, A. B.

*Affirma-
ma.* cioè, che la prima A alla seconda B abbia la

stessa proporzione che la

C. D.

terza C ha verso la quarta D, intendete voi, che anco due delle prime verso la seconda avranno la medesima proporzione, che due delle terze verso la quarta?

Simpl. Io l'intendo affai bene, imperciocchè mentre abbia una prima alla seconda la medesima proporzione, che una terza alla quarta, non saprei immaginarmi per qual ragione due delle prime alla seconda debbano aver proporzion diversa da quella, che hanno due delle terze alla quarta.

Salv.

Salv. Adunque mentre Voſignoria intende queſto, intenderà ancora che quattro, o dieci, o cento delle prime ad una ſeconda avranno la ſteſſa proporzione, che hanno quattro, o dieci, o cento delle terze ad una quarta.

Simpl. Certo che sì, e purchè i numeri delle multiplici ſieno uguali, facilmente apprendo, che la prima preſa due volte, o dieci, o cento, avrà la ſteſſa proporzione verſo la ſeconda, che ha la terza preſa anch'eſſa due volte, o dieci, o cento verſo la quarta. Sarebbe ben difficile perſuadermi il contrario.

Salv. Non è dunque ardua coſa il capire, che il multiplice della prima abbia la ſteſſa proporzione alla ſeconda, che ha l'ugualmente multiplice della terza alla quarta; cioè, che la prima moltiplicata quante volte ci pare, abbia alla ſeconda quella proporzione ſteſſa, che ha la terza moltiplicata altrettante volte verſo la quarta. Ora tutto quello, che ho eſemplificato fin qui con moltiplicare le grandezze antecedenti, ma non già le conſeguenti, immaginatevi, che ſia detto anco intorno al moltiplicare le conſeguenti ſolamente, ſenza punto altera-

re l'antecedenti, e ditemi: Credete voi, che date quattro grandezze proporzionali, la prima a due delle seconde abbia proporzion diversa da quella, che ha la terza a due delle quarte?

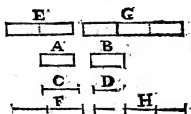
Simpl. Credo assolutamente di nò; anzi quando una prima abbia ad una seconda la medesima proporzione, che una terza ha verso la quarta, intendo assai bene, che quella stessa prima a due, o quattro, o dieci, delle seconde, avrà quella medesima proporzione, che ha la stessa terza verso due, o quattro, o dieci delle quarte.

Salv. Ammettendo dunque voi questo, confessate di restare appagato, e d'intender con facilità, che date quattro grandezze proporzionali A, B, C, D , e moltiplicate ugualmente la prima, e la terza, quella proporzione, che ha il multiplice E della prima A alla seconda, B , la stessa ancora abbia precisamente l'ugualmente multiplice F della terza C alla quarta D . Immaginatevi dunque, che queste sieno le nostre quattro grandezze proporzionali E, B, F, D , cioè il multiplice E della prima sia prima, la seconda stessa B sia seconda, il multiplice poi F della

*Prop. 1.
che è la
quarta
del V.
di Eucl.*

del.

della terza sia terza, e la quarta D sia quarta. Vossignoria mi ha anco detto di capire, che moltiplicandosi ugualmente le conseguenti B, D, cioè la seconda, e la quarta, senza alterar



punto le antecedenti, la medesima proporzione avrà la prima al moltiplicato della seconda, che la terza al moltiplicato della quarta. Ma queste quattro grandezze faranno per appunto E, F, ugualmente moltiplici della prima; e della terza, e G, H ugualmente moltiplice dell seconda, e della quarta.

Sagr. Confesso, che di ciò resto interamente appagato, ed ora intendo benissimo la necessità, per la quale gli ugualmente moltiplici delle quattro grandezze proporzionali eternamente s'accordano nell'essere o maggiori, o minori, o uguali, cc. Poichè mentre presi gli ugualmente moltiplici della prima, e della terza, e gli ugualmen-

*Coroll.
che è il
conver-
so della
def. del
V. degli
Elemen.*

te multipli della seconda, e della quarta Vosignoria mi dimostra, che il multiplice della prima al multiplice della seconda ha la medesima proporzione, che il multiplice della terza ha verso il multiplice della quarta, scorgo manifestamente, che quando il multiplice della prima sia maggiore del multiplice della seconda, allora il multiplice della terza dovrà necessariamente (per serbar la proporzione) esser maggiore del multiplice della quarta. Quando poi sia minore, ovvero uguale, anche il multiplice della terza dovrà esser minore, ovvero uguale al multiplice della quarta.

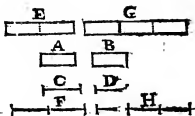
Simpl. Io ancora non sento in ciò repugnanza veruna. Resto bene con desiderio d'intendere come (supposte le quattro grandezze sproporzionali) sia vero, che gli ugualmente multipli non osservino sempre quella concordanza nell'esser maggiori, o minori, o uguali,

Salv. Io in questo ancora procurerò, che Vosignoria abbia compiuta soddisfazione.

Pongasi le quattro grandezze date AB, C, D, E , e sia la prima AB alquanto maggiore di quello, che ella do-

vrebbe essere per avere alla seconda C quella medesima proporzione, che ha la terza D alla quarta E. Mostrerò, che presi in certa particolar maniera gli ugualmente moltiplici della prima;

*Prop. 25.
che è il
converso
della 7.
def. del
V. d'Eu-
clide.*



e della terza, e presi altri ugualmente moltiplici della seconda, e quarta, quello della prima si troverà maggiore di quello della seconda, ma quello della terza non sarà altrimenti maggiore di quello della quarta, anzi lo dimostrerò esser minore.

Intendasi dunque esser levato dalla prima grandezza AB quell'eccesso, il quale la faceva maggiore, di quanto ella dovrebbe essere, acciò fosse precisamente proporzionale, e sia tale eccesso la FB. Restaranno ora dunque le quattro grandezze proporzionali, cioè la rimanente AF alla C avrà la medesima proporzione, che ha la D alla E.

Mul-

Moltiplichisi FB tante volte, che ella sia maggior della C., e sia questo multiplice il segnato HI. Prendasi poi HL altrettante volte multiplice della AF, e la M della D, quante volte per appunto la HI sarà stata presa



multiplice della FB. Stante questo :: non è dubbio alcuno, che tante volte sarà multiplice la composta LI della composta AB, quante volte la HI della FB, ovvero la M della D è multiplice.

Prendasi ora la PN multiplice della C con tal legge, che la stessa PN sia prossimamente maggiore della LH, ed in ultimo quanto sarà multiplice la PN della C, altrettanto pongasi la O multiplice della E.

Ora essendo la multiplice PN prossimamente maggiore della LH, se noi dalla PN intenderemo esser levata una delle grandezze sue componenti (che sarà

farà uguale alla C) resterà il residuo non maggiore della LH. Se dunque alla stessa PN renderemo la grandezza uguale alla C [che intendemmo esser levata] ed alla LH, che è non minore di detto residuo, aggiugneremo la HI, che pure è maggiore dell'aggiunta alla PN, sarà tutta la LI maggior della PN ..

Ecco dunque un caso, nel quale il multiplice della prima supera il multiplice della seconda. Ma essendo le quattro grandezze AF, C, D, E, fatte proporzionali da noi, ed essendosi presi gli ugualmente multipli EH, e M della prima, e della terza, e PN, e O della seconda, e della quarta, faranno essi [per le cose già stabilite di sopra] sempre concordi nell'esser maggiori, o minori, o uguali. Però essendo il multiplice LH della prima grandezza minore del multiplice PN della seconda, per la nostra costruzione, sarà anco il multiplice M della terza minore necessariamente del multiplice O della quarta ..

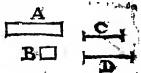
Si è pertanto provato, che mentre la prima grandezza sarà alquanto maggiore di quello, che ella dovrebbe essere, per avere alla seconda la stessa

proporzione, che ha la terza alla quarta, allora sarà possibile di prendere in qualche modo gli ugualmente multipli della prima, e della terza, e altri ugualmente multipli della seconda, e della quarta, e dimostrare, che il prodotto della prima eccede il prodotto della seconda, ma il prodotto della terza non eccede quel della quarta.

Sagr. Molto bene ho inteso quanto Vossignoria ha dimostrato fin qui. Resta ora, che ella da queste dimostrate premesse deduca come necessarie conclusioni le due controverse definizioni d'Euclide, lo che spero le sarà facile, avendo di già dimostrati due Teoremi conversi di quelle.

Salv. Facili per appunto riusciranno, e per dimostrare la quinta definizione io procederò così.

Prop. 3. Se delle quattro
che è la grandezze A, B,
def. 5. C, D, gli ugual-
del V. di mente multipli
Eucl. della prima, e ter-



za presi secondo qualunque multipli-
tà sempre si accorderanno nel pareggiare,
mancare, ovvero eccedere gli ugual-
mente multipli della seconda, e del-
la

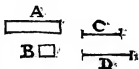
la quarta rispettivamente, io dico, che le quattro grandezze sono fra di loro proporzionali.

Imperciocchè sieno [se è possibile], non proporzionali. Adunque una delle antecedenti sarà maggiore di quello, che ella dovrebbe essere per avere alla sua conseguente la stessa proporzione, che ha l'altra antecedente alla sua conseguente. Sia per esempio la segnata A. Adunque per le cose già dimostrate, pigliandosi gli ugualmente multipli della A, e della C, in una tal maniera, e pigliandosi gli ugualmente multipli delle B, D, nel modo, che si è insegnato, si mostrerà la multiplice di A maggiore della multiplice di B, ma la multiplice di C non sarà altrimenti maggiore, ma minore della multiplice di D, che è contro al supposto fatto da noi.

Per dimostrare la settima definizione *Prop. 4.* ne dirò così. Sieno le quattro gran- *che è la*
 dezze A, B, C, D, e suppongasi, *7. def.*
 che presi in qualche particolar manie- *del V.*
 ra gli ugualmente multipli delle due *di Eucl.*
 antecedenti prima, e terza, e gli ugualmente multipli delle due conseguenti seconda, e quarta, suppongasi dico, che si trovi un caso, nel quale
 il mul.

Il moltiplice di A sia maggior del moltiplice di B, ma il moltiplice di C non sia maggior del moltiplice di D. Io dico, che la A alla B avrà maggior proporzione, che la C alla D. Cioè, che la A sa-

rà alquanto maggior re di quel, che ella dovrebbe essere per avere alla B la



stessa proporzione, che ha C alla D.

Se è possibile non sia A. maggior del giusto. :: sarà dunque precisamente proporzionale, ovvero minor del giusto per esser proporzionale.

Quanto al primo, se ella fosse precisamente aggiustata, e proporzionale, farebbero, per le cose già provate, gli ugualmente moltiplici della prima, e della terza presi in qualunque modo, sempre concordi nel pareggiare, o mancare, o eccedere gli ugualmente moltiplici della prima, e della terza presi in qualunque modo, lo che è contro alla supposizione.

Se poi la prima fosse minor del giusto per esser proporzionale, questo è segno, che la terza sarebbe maggiore del suo dovere, per avere alla quarta quella proporzione, che ha la prima alla.

alla seconda. Allora io direi, che si levasse dalla terza quell' eccesso, che la fa esser maggior del giusto. E però la rimanente resterebbe poi per appunto proporzionale. Ora consideriamo que' multipli particolari supposti da principio; è manifesto, che essendo il multiplice della prima maggior del multiplice della seconda, anco il multiplice della terza, cioè di quella rimanente, sarà maggior del multiplice della quarta. Adunque, se in cambio di pigliar il multiplice di quella rimanente ripiglieremo l' ugualmente multiplice di tutta la terza intera, questo sarà maggiore, che non era il multiplice di quella rimanente, e però sarà questo stesso molto maggiore di quel della quarta, lo che è contro la supposizione.

Sagr. Resto soddisfattissimo di questa dilucidazione fattami da Vosignoria in materia, nella quale io n' aveva già lungo tempo bisogno: nè saprei esprimere, quale in me sia maggiore o il gusto di questa cognizione nuovamente acquistata, o il rammarico di non averla io procurata col chiederla a Vosignoria fin dal principio de' nostri primi abboccamenti, tanto più
aven-

avendo io inteso, che ella la conferiva a diversi Amici, a' quali per la vicinanza era lecito di frequentar la sua Villa. Ma seguitiamo di grazia i discorsi, quando però il Signor Simplicio non abbia, che replicare intorno alla materia fin quì considerata.

Simpl. Io non saprei, che soggiungere, anzi resto interamente appagato del discorso, e capace delle dimostrazioni sentite.

Salv. Posti questi fondamenti, si potrebbe compendiare in parte, e riordinare tutto il quinto d'Euclide, ma ciò farebbe una digressione troppo lunga, e troppo lontana dal nostro principale intento. Oltrechè io sò, che le Signorie vostre averanno veduto di simili compendj stampati da altri Autori.

Ora essendosi considerate fin quì a requisizione delle Signorie Vostre, le definizioni quinta, e settima del quinto Libro; spero, che esse concederanno volentieri a me il poter proporre adesso un'antica mia osservazione sovvenutami sopra un'altra definizione d'Euclide medesimo. Il soggetto non farà diverso dall'incominciato, e non parrà alieno dal nostro proposito, essendo

sendo intorno alla proporzion composta, la quale vien maneggiata spesse volte dal nostro Autore ne' suoi Libri.

Trovafi fra le definizioni del sesto Libro d'Euclide la quinta della proporzion composta, la quale dice in questo modo.

Allora una proporzione si dice composta di più proporzioni, quando le quantità di dette proporzioni moltiplicate insieme averanno prodotto qualche proporzione. Def. 5. *del sesto Libro d'Eucl.*

Offervo poi, che nè il medesimo Euclide, nè alcun altro Autore antico si serve della stessa definizione, nel modo, nel quale ella è stata posta nel Libro: onde ne seguono due inconvenienti, cioè al Lettore difficoltà d'intelligenza, ed allo Scrittore nota di superfluità.

Sagr. Questo è verissimo ma non mi par probabile, che la suprema accuratezza d'Euclide abbia fra i suoi Libri posta questa definizione inconsideratamente, ed in vano. Però non farei affatto fuor di sospetto, che ella vi fosse stata aggiunta da altri, o almeno alterata di tal sorte, che ella oggidì non si riconosca più, mentre dagli Autori si pone in opera nel dimostrare i Teoremi. *Simpl.*

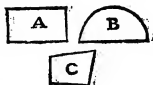
Simpl. Che gli altri Autori non sene servano, io lo crederò alle Signorie Vostre, non avendovi fatto molto studio, mi dispiacerebbe bene, se da Euclide stesso, il quale viene stimato da voi altri per tanto puntuale nelle sue Scritture, fosse stata posta indarno. Ma qui bisogna poi, ch'io confessi come l'intelletto mio, il quale non si è mai più, che mediocrementemente inoltrato nella Matematica, ha, incontrato difficoltà intorno a questa definizione, forse non minore, che nelle già spianate dal Sig. Salviati.

Mi aiutai un tempo fa con legger lunghissimi Comenti scritti sopra queste materie, ma per dire il vero, non conobbi giammai, che mi si sgombrassero quelle tenebre, che mi tenevano offuscato l'intelletto. Però, se Voignoria avesse qualche particolar considerazione, che mi facilitasse questo ancora, l'assicuro, che mi sarebbe un favore molto segnalato.

Salv. Forse ella si presuppone, che questa sia materia di profonde speculazioni, e pure troverà, che non consiste in altro, che in un semplicissimo avvertimento.

S'immagini Voignoria le due grandezze

dezze A, B dello stesso genere. Avrà la grandezza A alla B una tal proporzione; e dopo concepisca esser posta fra di loro un'altra grandezza C pur dello stesso genere. Si dice, che quella tal proporzione, che ha la grandezza A alla B viene ad esser composta delle due proporzioni intermedie, cioè di quella, che ha la A alla C, e di quella, che ha la C alla B. Que-



sto è per appunto il senso, secondo il quale Euclide si serve della predetta definizione.

Simpl. E' vero, che Euclide intende in questo modo la proporzione composta, ma però non intendo io, come la grandezza A alla B abbia proporzione composta delle due proporzioni, cioè della A alla C, e della C, alla B.

Salv. Ora ditemi, Sig. Simplicio, intendete voi, che la A alla B abbia qualche proporzione, qualunque ella sia.

Simpl.

Simpl. Essendo esse del medesimo genere, Signor sì.

Salv. E che quella proporzione sia immutabile, e non possa mai essere altera, o diversa da quella, che ell'è?

Simpl. Intendo questo ancora.

Salv. Vi soggiungo ora io, che nello stesso modo per appunto la A alla C ha una proporzione immutabile, e così anco la C alla B. La proporzione poi, che è fra le due estreme A, e B si chiama esser composta delle due proporzioni, che mediano fra esse estreme, cioè di quella, che ha la A alla C, e di quella, che ha la C alla B.

Def. da porsi in luogo della 5. Def. del 6. d'Euclide.

Aggiungo di più, che se Vosignoria fra queste grandezze A, e B s'immaginerà, che sia frapposta non una grandezza sola, ma più d'una, come ella vede in questi segni A, C, B, D, s'intenderà pure la proporzione della A alla B esser composta di tutte le proporzioni, le quali sono intermedie fra di esse; cioè delle proporzioni, che hanno la A alla C, la C alla D, la D alla B; e così, se più fossero le grandezze sempre la prima all'ultima ha proporzione composta di tutte quelle proporzioni, le quali mediano fra di esse.

Au-

Avvertisco ora in quest' occasione, che quando le proporzioni componenti sieno uguali fra di loro, o per dir meglio sieno le stesse, allora la prima all' ultima avrà, come di sopra abbiamo detto, una tal proporzione composta di tutte le proporzioni intermedie; ma perchè quelle proporzioni intermedie sono tutte uguali, potremo esprimere il medesimo nostro senso con che la proporzione della prima all' ultima è una proporzione tanto moltiplice della proporzione, che ha la prima alla seconda, quante per appunto saranno le proporzioni, che si frappongano fra la prima, e l' ultima. Come, per esempio, se fossero tre grandezze, e che la medesima proporzione fosse fra la prima, e la seconda, che è fra la seconda, e la terza, allora sarebbe vero, che la prima alla terza avrebbe proporzione composta delle due proporzioni, le quali sono fra la prima, e la seconda, e fra la seconda, e la terza: ma perchè queste due proporzioni si suppongano uguali, cioè le stesse, potrà dirsi, che la proporzione della prima alla terza è duplicata dalla proporzione, che ha la prima alla seconda. Così, quando le grandezze fossero quattro, si potrebbe dire, che la proporzione della prima alla quarta è composta di

di quelle tre proporzioni intermedie , ed ancora , che è triplicata della proporzione della prima alla seconda , venendo composta tal proporzioni , che ha la prima alla quarta , della proporzione della prima alla seconda tre volte presa ; ec.

Ma quì finalmente non vanno contemplazioni , nè dimostrazioni , imperciocchè è una semplice imposizione di nome . Quando a Vossignoria non piacesse il vocabolo di composta , chiamandola incomposta , o impastata , o confusa , o in qualunque modo più aggrada a Vossignoria , solo accordiamoci in questo , che quando poi avremo tre grandezze dello stesso genere , ed io nominerò la proporzione incomposta , o impostata , o confusa , vorrò intendere la proporzione , che hanno l'estreme di quelle grandezze , e non altro .

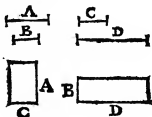
Sagr. Tutto questo intendo benissimo : anzi ho più d'una volta osservato l'artificio d'Euclide nella Proposizione , dove ci dimostra , che i parallelogrammi equiangoli hanno la proporzione composta delle proporzioni de' lati , egli si trova in quel caso aver le due proporzioni componenti in quattro termini , che sono i quattro lati
de'

de' parallelogrammi : però comanda, che quelle due proporzioni si mettano in tre termini solamente; sicchè una di quelle proporzioni sia fra 'l primo termine, e 'l secondo; l'altra sia fra 'l secondo, e 'l terzo. Nella dimostrazione poi, non fa altro, se non che ei dimostra, che l'un parallelogrammo all'altro è come 'l primo termine al terzo, cioè ha la proporzione composta di due proporzioni, di quella, che ha il primo termine al secondo, e dell'altra, che ha il secondo al terzo, le quali sono quelle due proporzioni, che prima egli aveva disgiunte ne' quattro lati de' parallelogrammi.

Salv. Vossignoria discorre benissimo. Ora intesa, e stabilita la definizione della proporzione composta in questo modo [la quale non consiste in altro, fuori che nell'accordarsi, che sorta di roba noi intendiamo sotto quel nome] si può dimostrare la proposizion ventitrè del sesto Libro d'Euclide, come la dimostra egli stesso, perchè quivi ei non suppone la definizione nel modo, nel quale ella è divulgata, ma bensì nel modo detto sopra da noi. Dopo la nominata proposizion ventitrè io soggiugnerei come Corollario di

di essa la divulgata definizione quinta del sesto Libro della proporzion composta, tramutandola però in un Teorema.

Prop. 4. che è la Def. 5. del 6. d' Eucl. Ponganfi due proporzioni, una delle quali sia ne' termini A, B l'altra ne termini C, D. Dice la definizione vulgata, che la proporzione composta di queste due proporzioni si avrà,



se noi moltiplicheremo fra di loro le quantità di esse proporzioni. Io corro col Signor Simplicio nel credere, che questa sia una proposta difficile da capirsi, e bisognosa di prova; però con poca fatica noi la dimostriamo così:

Se li quattro termini delle due proporzioni non fossero in linee, ma in altre grandezze, immaginiamoci, ch'ei sieno posti in linee rette. Facciasi poi delle due antecedenti A, C

un

un rettangolo, siccome delle due conseguenti B, D un altro rettangolo. E' chiaro, per la ventitrè del sesto d'Euclide, che il rettangolo fatto dalle A, C al rettangolo delle B, D, avrà quella proporzione, che è composta delle due proporzioni A verso B, e C verso D, le quali son quelle due, che ponemmo da principio a fine di ritrovare qual fosse la proporzione, che risultava dalla comparazione di esse. Essendo dunque la proporzione composta delle proporzioni A verso B, e C verso D, quella, che ha il rettangolo AC al rettangolo BD, per la suddetta proposizion ventitrè del sesto, io domando al Signor Simplicio, come abbiamo noi fatto per ritrovare questi due termini, ne' quali consiste la proporzione, che si cercava da noi?

Simpl. Io non credo, che si sia fatto altro, se non formar due rettangoli con queste quattro linee poste da principio; uno cioè colle antecedenti A, C, e l'altro colle conseguenti B, D.

Salv. Ma la formazione de' rettangoli nelle linee della Geometria corrisponde per appunto alla moltiplicazione de' numeri nell'Arismetica,

come fa ogni Matematico, anche principiante, e le cose, che noi abbiamo moltiplicate sono state le linee A, C, e le linee B, D, cioè i termini omologhi delle poste proporzioni.

Ecco dunque, come moltiplicando insieme le quantità, o le valute delle due proporzioni semplici, si produce la quantità, o la valuta della proporzione, la quale poi si chiama composta di quelle.

Fine del Quinto Libro.





D E G L I
ELEMENTI
 D' E U C L I D E
 TRADOTTI IN VOLGARE
 LIBRO SESTO.



DEFINIZIONI.

I.

LE figure rettilinee simili sono quelle, che hanno ciascun angolo uguale, e d' intorno agli uguali angoli i lati proporzionali.

II.

Le figure reciproche sono, quando nell' una, e nell' altra sono le antecedenti, e conseguenti proporzionali.

G 2

La

La linea retta si dice esser segata secondo l'estrema, e mezza proporzione, quando sia come tutta la linea alla parte maggiore, così la maggiore alla minore.

I V.

L'altezza di ciascuna figura è la linea perpendicolare, che dalla cima è tirata fino alla base.

V.

La proporzione si dice essere composta di proporzioni, quando le quantità delle proporzioni moltiplicate fra loro fanno una certa proporzione.

T E O R E M A I.

PROPOSIZIONE I.

I triangoli, e parallelogrammi, che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

...I

Sieno

Sieno i triangoli ABG , ACD , e i parallelogrammi EC , CF , che abbiano la medesima altezza, cioè la per-



pendicolare dal punto A tirata alla BD . Dico, che come è la base BC alla Base CD , così è il triangolo ABC al triangolo ACD , ed il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF . Prolunghisi BD dall'una, e l'altra parte a' punti H , L , e pongansi quanto si vogliano BG , GH uguali alla base BC , ed alla base CD , pongansi quante si vogliano uguali DK , K , L , e giungansi AG , AH , AK , AL . Perchè dunque CB , BG , GH sono uguali, faranno i triangoli AHG , AGB , ABC uguali fra loro, onde quante volte la base HC è multiplice della base BC , tante volte il triangolo AHC è multiplice del triangolo ABC , e per la medesima ragione quante volte la base LC è multiplice della base CD , tante volte il triangolo ALC è multiplice del triangolo ACD , e se la base HC è uguale alla base CL , ancora il triangolo AHC sarà uguale al triangolo ALC , e se la base HC avanza la base CL ,

38. del
prim.

eziandio il triangolo AHC avanzerà il triangolo ALC , e se è minore, farà minore, essendo dunque quattro grandezze, cioè le due basi BC , CD , e i due triangoli ABC , ACD , e si sono prese l'ugualmente moltiplici della base BC , e del triangolo ABC , cioè la base HC , ed il triangolo AHC : e della base CD , e del triangolo ACD : altre in qualunque modo ugualmente moltiplici, cioè la base CL , ed il triangolo ALC , e si è dimostrato, che



4. del quinto. se la base HC avanza la base CL , anche il triangolo AHC avanzerà il triangolo ALC , e se è uguale, farà uguale, e se minore, minore, adunque è come la base BC alla base CD , così il triangolo ABC al triangolo ACD , e perchè il parallelogrammo EC è doppio del triangolo ABC , ed il parallelogrammo FC doppio del triangolo ACD , e le parti delle grandezze, che sono moltiplici nel medesimo modo hanno fra loro la medesima proporzione, sarà come il triangolo ABC al triangolo ACD così il parallelogrammo EC al para-
41. del prim..
9. del quinto.

parallelogrammo. CF , perchè dunque si è dimostrato, che come è la base BC alla base CD , così è il triangolo ABC al triangolo ACD : e come *Affiom.* è il triangolo ABC al triangolo ACD , 6. *del* così è il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF ; sarà come la base BC alla base CD , così il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF , laonde i triangoli, e i parallelogrammi, che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi, lo che bisognava dimostrare ..

T E O R E M A I I.

PROPOSIZIONE II.

Se nel triangolo sia tirata una linea retta parallela ad un lato, quella segnerà i lati di detto triangolo proporzionalmente: e se i lati del triangolo siano segati proporzionalmente, la linea retta, che congiunge i segmenti, sarà parallela all'altro lato del triangolo ..

Tirisi la DE parallela ad un; lato BC del triangolo ABC . Dico, che come è la BD alla DA , così è la CE alla EA . Giungansi BE , CD , adunque il triangolo BDE è uguale al triangolo CDE , perchè sono nella medesima base DE , e nelle medesime parallele DE , BC : ed è un altro triangolo ADE , e le cose uguali ad una medesima hanno la medesima proporzione; come dunque è il triangolo BDE al triangolo ADE , così è il triangolo CDE al



Per l' ant. triangolo ADE , ma come è il triangolo BDE al triangolo ADE , così è la BD alla DA ; perciocchè avendo la medesima altezza, cioè la perpendicolare dal punto E tirata alla AB , sono fra loro come le basi, e per la medesima ragione come il triangolo CDE al triangolo ADE , così è la CE alla EA , adunque come è la BD alla DA , così è la CE alla EA . Ma siano segati proporzionalmente i lati AB , AC del triangolo ABC , e come è la BD alla DA , così sia la CE alla EA : e giungansi DE . Dico la DE essere parallela alla BC .

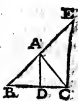
BC. Avendo fatto le medesime cose, perchè come è la BD alla DA, così è la CE alla EA; ma come è la BD alla DA, così è il triangolo BDE al triangolo ADE, e come è la CE alla EA, così è il triangolo CDE al triangolo ADE: farà come il tri- *Affiom.*
 angolo BDE al triangolo ADE così 6. del
 il triangolo CDE al triangolo ADE, *quinto.*
 ed avendo amendue i triangoli BDE, CDE la medesima proporzione al triangolo ADE, farà il triangolo BDE uguale al triangolo CDE: e sono *Affiom.*
 nella medesima base DE; ma i trian- *7. del*
 goli uguali fatti nella medesima base *quinto,*
 sono eziandio nelle medesime parale- *e 40. del*
 le, adunque la DE è parallela alla *prim.*
 BC, laonde, se nel triangolo sia tirata una linea retta parallela ad un lato, quella segnerà i lati di detto triangolo proporzionalmente: e se i lati del triangolo siano segati proporzionalmente, la linea retta, che congiunge i segamenti, farà parallela all'altro lato del triangolo, lo che bisognava dimostrare.



Se un angolo del triangolo sia segato per mezzo, e la linea retta, che lo sega, seghi ancor la base, averanno le parti della base la medesima proporzione, che gli altri lati del triangolo: e se le parti della base abbiano la medesima proporzione, che gli altri lati del triangolo, la linea retta, che dalla cima si tira fino al segamento della base, segnerà l'angolo per mezzo.

9. del
1^{im.}

Sia il triangolo ABC , e seghisi l'angolo BAC per mezzo della linea retta AD . Dico come la BD alla DC , così essere la BA alla AC , tirisi per C la



31. del
prim.

CE parallela alla DA , e la BA prolungata concorra con essa nel punto E , perchè dunque nelle parallele AD , EC cade una linea retta AC , sarà l'angolo ACE uguale all'angolo CAD , ma si pone l'angolo CAD

ugua-

29. del
prim.

uguale all'angolo BAD adunque l'angolo BAD sarà uguale all'angolo ACE , oltre a ciò, perchè la linea retta BAE cade nelle parallele AD , EC , l'angolo esteriore BAD è uguale all'interiore AEC , ma si è dimostrato l'angolo ACE uguale all'angolo BAD , adunque ancor l'angolo ACE sarà uguale all'angolo AEC ; *6. del prim.*
 e però il lato AE sarà uguale al lato AC , e perchè la AD è tirata parallela ad un lato del triangolo BCE , cioè ad EC , sarà come la BD alla DC , così la BA alla AE , ma la AE è uguale alla AC , adunque è come la BD alla DC , così la BA alla AC . *Per l'ant. Affiom. 3. del quinto.* Ma sia come la BD alla DC , così la BA alla AC , e giungasi AD . Dico l'angolo BAC esser legato per mezzo dalla linea retta AD , perciocchè avendo fatto le medesime cose, ed essendo come la BD alla DC , così la BA alla AE , conciossiacchè la AD si sia tirata parallela ad un lato del triangolo BCE , cioè EC , sarà come la BA alla AC , così la BA alla AE . *Per l'ant. Affiom. 7. del quinto.* Adunque la AC è uguale alla AE , e però l'angolo AEC è uguale all'angolo ECA , ma l'angolo AEC è uguale all'esteriore BAD , e l'angolo $29. del prim.$

lo *ACE* è uguale all'alteruo *CAD*, onde eziandio l'angolo *BAD* farà uguale all'angolo *CAD*, l'angolo dunque *BAC* è segato per mezzo dalla linea retta *AD*, laonde, se un angolo del triangolo sia segato per mezzo, e la linea retta, che lo sega, seghi ancor la base, averanno le parti della base la medesima proporzione, che gli altri lati del triangolo, e se le parti della base abbiano la medesima proporzione, che gli altri lati del triangolo, la linea retta, che dalla cima si tira fino al segamento della base, segherà l'angolo per mezzo, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A IV.

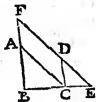
PROPOSIZIONE IV.

I lati de' triangoli equiangoli, che stanno d'intorno agli uguali angoli, sono proporzionali fra loro: ed i lati omologhi, ovvero della medesima ragione, sono quelli, che agli angoli uguali si sottopongono.

Sia-

Siano i triangoli equiangoli ABC , DCE , che abbiano l'angolo ABC uguale all'angolo DCE , e l'angolo ACB all'angolo DEC , ed oltre a questo l'angolo BAC all'angolo CDE .

Dico, che de' triangoli ABC , CDE sono proporzionali i lati, che stanno d'intorno agli angoli uguali, ed i lati omologhi, ovvero della medesima ragione, sono quelli che si sottopongo-



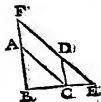
no agli angoli uguali. Pongasi la BC per diritto alla CE , e perchè gli angoli ABC , ACB sono minori di due retti, e l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC , faranno gli angoli ABC , DEC minori di due retti, onde le BA , ED prolungate concorreranno fra loro; prolunghinsi, e concorrano nel punto F , e perchè l'angolo DCE è uguale all'angolo ABC , farà la BF parallela alla DC , similmente perchè l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC , la AC farà parallela alla FE , adunque $FACD$ è parallelogrammo; e perciò la FA è uguale alla CD , e la AC alla FD , e perchè si è tirata la AC parallela ad

17. del prim.

28. del prim.

34. del prim.

2. di ad un lato del triangolo $E B E$, cioè: *quef.* ad $F E$, sarà come la $B A$ alla $A F$,
Affiam. così la $B C$ alla $C E$, ma la $A F$ è
 3. del uguale alla $C D$, adunque come la
 quinto. $B A$ alla $C D$, così la $B C$ alla $C E$::
 e permutandole come la $A B$ alla $B C$,
 così è la $D C$ alla $C E$, e perchè la
 $C D$ è parallela alla $B F$, sarà come
 la $B C$ alla $C E$, così la $F D$ alla $D E$,
 2. di ma la $D F$ è uguale alla $A C$, adun-
 quef. que come la $B C$ alla $C E$, così la
 $F D$ alla $D E$, ma la $D F$ è uguale
 alla $A C$, adunque come la $B C$ alla
 $C E$, così la $A C$ alla
 $D E$:: e permutandole
 come la $B C$ alla $C A$,
 così la $C E$ alla $E D$,
 perchè dunque si è dimo-
 strato, che come è la
 $A B$ alla $B C$, così è la
 $D C$ alla $C E$; e come
 la $B C$ alla $C A$, così la $C E$ alla $E D$,
 sarà per l'uguaglià in proporzione or-
 dinata come la $B A$ alla $A C$, così la
 $C D$ alla $D E$, onde i lati de' trian-
 goli equiangoli, che stanno d'intorno
 agli angoli uguali, sono proporziona-
 li fra loro, ed i lati omologhi, ovve-
 ro della medesima ragione sono quel-
 li, che agli angoli uguali si sottopon-
 gono, lo che bisognava dimostrare.



T E O R E M A V.

PROPOSIZIONE V.

Se due triangoli abbiano i lati proporzionali, faranno ancora equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali i lati omologhi si sottopongono.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano i lati proporzionali, e sia come la AB alla BC , così la DE alla EF : e come la BC alla CA , così le EF alla FD , ed ancora come la BA alla AC , così la ED alla DF . Dico, il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF , ed avere quegli angoli, a' quali si sottopongono i lati omologhi, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF , e l'angolo BCA all'angolo EFD , ed oltre a questo l'angolo BAC all'angolo EDF . Costituisca si nella linea retta EF , e ne' punti E , F , che sono in essa, l'angolo FEG uguale *23. del* all'angolo ABC , e l'angolo EFG *prim.* all'angolo BCA , onde l'angolo ri-

ma.

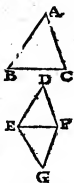
manente BAC è uguale al rimanente EGF , e però il triangolo ABC è equiangolo al triangolo EGF . Sono dunque proporzionali i lati de' trian-

*Per
l'ant.*

PR. 17

*Affom.
7. del
quinto.*

goli ABC , EGF , che stanno d' intorno agli uguali angoli: ed i lati omologhi quelli, che sono sottoposti agli angoli uguali, onde come la AB alla BC , così la GE alla EF , ma come è la AB alla BC , così è la DE alla EF , adunque come la DE alla EF , così la GE alla EF , ed avendo ciascuna di esse DE , EG la medesima proporzione alla EF , sarà la DE uguale alla EG , e per la medesima ragione la DF sarà uguale alla FG , e perchè la DE è uguale alla EG , e la EF è comune, le due DF , EF sono uguali alle due GE , EF : e la base DF è uguale alla base FG , adunque l'angolo DEF è uguale all'angolo GEF , ed il triangolo DEF uguale al triangolo GEF , e gli altri angoli uguali agli altri angoli, a' quali i lati uguali si sottopongono, onde l'angolo DFE è uguale all'angolo GFE , e l'angolo EDF



*3. del
prim.*

ugua.

uguale all'angolo EGF , e perchè l'angolo FED è uguale all'angolo GEF , e l'angolo GEF all'angolo ABC , farà anche l'angolo ABC uguale all'angolo FED , e per la medesima ragione l'angolo ACB uguale all'angolo DFE , e ancora l'angolo A uguale all'angolo D , adunque il triangolo ABC sarà equiangolo al triangolo DEF , laonde, se due triangoli abbiano i lati proporzionali, faranno ancora equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali i lati omologhi si sottopongono, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A VI.

PROPOSIZIONE VI.

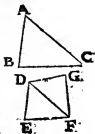
Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e d'intorno agli uguali angoli abbiano i lati proporzionali, faranno detti triangoli equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali gli omologhi lati si sottopongono.

Sia

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano un angolo BAC uguale ad un angolo EDF , e d'intorno agli uguali angoli i lati proporzionali, e sia come la BA alla AC , così la ED alla DF . Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF , ed avere l'angolo ABC uguale all'angolo DEF , e l'angolo ACB all'angolo DFE . Costruiscansi nella linea retta DF , e ne' pun-

23. del
prim.

ti D , F , che sono in essa, l'angolo FDG uguale ad uno degli angoli BAC , EDF , e l'angolo DGF uguale all'angolo ACB , adunque il rimanente angolo B è uguale al rimanente G , ed il



4. di
ques.

Affiom.

6. del

quinto.

Affiom.

7. del

quinto.

triangolo ABC è equiangolo al triangolo DGF , e perciò come la BA alla AC , così è la GD alla DF : e si pone ancora come è la BA alla AC , così essere la ED alla DF , adunque come è la ED alla DF , così è la GD alla DF , e però la ED è uguale alla GD , e la DF è comune, onde le due ED , DF sono uguali alle due GD , DF , e l'angolo EDF è uguale all'angolo GDF ; la base dun-

que.

que EF è uguale alla base FG, ed il triangolo DEF uguale al triangolo GDF, e gli altri angoli uguali agli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, adunque l'angolo DFG è uguale all'angolo DFE, e l'angolo G all'angolo E, ma l'angolo DFG è uguale all'angolo ACB, onde l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE, e si pone l'angolo BAC uguale all'angolo EDF, il rimanente dunque B è uguale al rimanente E, ed il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF, onde se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e d'intorno agli uguali angoli abbiano i lati proporzionali, faranno detti triangoli equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali gli omologhi lati si sottopongono, lo che bisognava dimostrare.



T E O R E M A VII.
PROPOSIZIONE VII.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e d'intorno agli altri angoli abbiano i lati proporzionali, e de' rimanenti l'uno, e l'altro insieme, o sia minore, o non minore del retto, faranno detti triangoli equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, intorno a' quali sono i lati proporzionali.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAC uguale all'angolo EDF , e d'intorno agli altri angoli ABC , DEF i lati proporzionali, dimodochè la DE alla EF sia come è la AB alla BC , e de' rimanenti angoli, che sono a' punti C , F , sia prima l'uno, e l'altro insieme minor del retto. Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF , e l'angolo ABC uguale all'angolo

angolo DEF, ed il rimanente, cioè l'angolo C uguale al rimanente F. Perciocchè, se l'angolo ABC sia disuguale all'angolo DEF, uno di essi sarà maggiore. Sia maggiore ABC, ^{23. del prim.} e costituisca nella linea retta AB, e nel punto in essa B l'angolo ABG uguale all'angolo DEF, e perchè l'angolo A è uguale all'angolo D, e l'angolo ABG all'angolo DEF, sarà eziandio il rimanente AGB uguale al rimanente DFE, adunque il triangolo ABG è equiangolo al triangolo DEF, e come è la AB alla BG, così è la DE alla EF, ma come la DE alla EF, così si pone la AB alla BC, come dunque la AB alla BC, così la AB alla BG; ed avendo la AB la medesima proporzione ad ambedue BC, BG, sarà la BC uguale alla BG, e perciò l'angolo C sarà uguale all'angolo BGC, ma l'angolo C si pone minore del retto, adunque eziandio BGC è minore del retto, e l'angolo conseguente AGB è maggiore del retto: e si è dimostrato l'angolo AGB uguale all'angolo F, l'an-

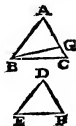


4. di
ques.
Assiom.
6. del
quinto:
Assiom.
7. del
quinto.

13. del
prim.

l'angolo dunque F è maggior del retto, ma si pone minore del retto, lo che è inconveniente, onde l'angolo ABC non è disuguale all'angolo DEF , e l'angolo A è uguale all'angolo D , adunque ancora il rimanente C è uguale al rimanente F , ed il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF . Ma pongasi ciascuno degli angoli C , F non minor del retto. Dico similmente il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF : perciocchè avendo fatte le medesime cose, dimostreremo eziandio BC essere uguale a BG , e l'angolo C uguale all'angolo BGC ; ma l'angolo C non è minore del retto, adunque BGC non sarà minore del retto, ed i due angoli del triangolo BGC non saranno minori di due retti, che è impossibile, laonde l'angolo ABC non è disuguale all'angolo DEF , ma uguale necessariamente, e l'angolo A è uguale all'angolo D , adunque il rimanente C è uguale al rimanente F , e perciò il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF , se dunque due

trian-



triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e d'intorno agli altri angoli abbiano i lati proporzionali, e de' rimanenti l'uno, e l'altro insieme o sia minore, o non minore del retto, faranno detti triangoli, equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, intorno a' quali sono i lati proporzionali, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, i triangoli, che le stanno d'intorno ed a tutto il triangolo, e fra loro sono simili.

Sia il triangolo rettangolo ABC , che abbia l'angolo retto BAC , e dal punto A tirisi la AD perpendicolare alla BC . Dico, che i triangoli ABD , ADC a tutto il triangolo ABC , e fra loro sono simili. Perciocchè essendo l'angolo BAC uguale all'angolo ADB , perchè l'uno, e l'altro è retto, ed essendo l'angolo B comune a' due

4. di
quesf.

due triangoli ABC , ABD , sarà il rimanente ACB uguale al rimanente BAD , adunque il triangolo ABC è equiangolo al triangolo ABD , e perciò come la CB , che è sottoposta all'angolo retto del triangolo ABC alla AB , che è sottoposta all'angolo C del detto triangolo ABC , così la AB sottoposta all'angolo retto del triangolo ABD , alla BD sottoposta all'angolo BAD , del medesimo triangolo ABD , che è uguale all'angolo C : e come BA ad AC , così BD a DA , e come AC



Prima
def. di
quesf.

a CB , così DA ad AB , adunque il triangolo ABC è equiangolo al triangolo ABD , ed ha i lati proporzionali d'intorno agli uguali angoli, onde il triangolo ABC è simile al triangolo ABD ; dimostreremo ancora per la medesima ragione il triangolo ADC essere simile al triangolo ABC , e perciò l'uno, e l'altro di essi ABD , ADC è simile a tutto il triangolo ABC . Dico oltre a ciò, che i triangoli ABD , ADC sono fra loro simili, perchè l'angolo BDA retto è uguale al retto ADC ; e si è dimostrato BAD uguale all'angolo C ;

farà

farà adunque il rimanente B uguale al rimanente DAC , adunque il triangolo ABD è equiangolo al triangolo ADC , e come la AB sottoposta all'angolo retto del triangolo ABD alla BD sottoposta all'angolo BAD del medesimo triangolo ABD , così la CA sottoposta all'angolo retto del triangolo ADC alla AD sottoposta all'angolo C del triangolo ADC , che è uguale all'angolo BAD . E per la medesima ragione come la BD alla DA , così la AD alla DC , e come la DA alla AB , così la DC alla CA , adunque il triangolo ABD è simile al triangolo ADC , laonde, se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, i triangoli, che le stanno d'intorno ed a tutto il triangolo, e fra loro sono simili, lo che bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O.

Da questo è chiaro, che se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, quella sarà proporzionale di

H

mez-

mezzo fra le parti della base, ed oltre a ciò il lato, che è verso ciascuna parte della base sarà proporzionale di mezzo fra la base, e detta parte.

P R O B L E M A I.
PROPOSIZIONE IX.

Dalla data retta linea tagliare una parte proposta.

Sia la data linea retta AB , bisogna dalla AB tagliare la parte proposta. Propongasi la terza parte, e tirisi dal punto A la linea retta AC , la quale con AB contenga qualsivoglia angolo, e piglisi nella AC qualunque punto D , e pongansi DE , EC uguali alla AD , poi giungansi BC , e per D tirisi la DF parallela alla CB , e perchè ad un lato del triangolo ABC , cioè a CB , si è tirata una parallela DF , farà come la CD alla DA , così la BF alla FA , e la CD è doppia della DA , adunque la BF farà doppia della



2. di
ques.

della FA, e la BA tripla della AF, onde dalla data retta linea si è tagliata la terza parte proposta, lo che bisognava fare.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE X.

Segare una data retta linea non segata, conforme ad un'altra segata.

Sia la data linea retta non segata AB, e la segata AC, bisogna segare la linea retta AB conforme alla segata AC, sia segata la AC ne' punti D, E, e pongansi di modo, che contengano qual angolo si voglia, e congiunta la BC; per gli punti D, E, tirinsi DF, EG parallele alla BC, e per D tirisi la DHK parallela alla AB, adunque l'uno, e l'altro di essi FH, HB è parallelogrammo, e però la DH è uguale alla FG, e la HK alla GB, e perchè ad un lato del triangolo DKC, cioè a 2. di KC, si è tirata la parallela HE, sa-
ques.
rà come la CE alla ED, così la KH



H 2 alla

alla HD, ed è la KH uguale alla GB, e la HD all'a GF, adunque come è la CE alla ED, così è la BG alla GF, similmente perchè ad un lato del triangolo AGE, cioè alla EG, si è tirata la parallela FD, come è la ED alla DA, così sarà la GF alla FA, ma si è dimostrato, che come la CE alla ED; così è la BG alla GF, come dunque la CE alla ED, così è la BG alla GF, e come la ED alla DA, così la GF alla FA, adunque si è segata una data retta linea non segata conforme ad un'altra segata, lo che bisognava fare.

P R O B L E M A I I I.

PROPOSIZIONE XI.

Date due linee rette trovare la terza proporzionale.

Siano due linee rette date AB, AC, e pongansi di modo, che contengano qualsivoglia angolo, bisogna trovare la terza proporzionale delle AB, AC. Pro-
lunginfi le AB, AC a' punti D, E,
e pon-



e pongasi la BD uguale alla AC, e giunta la BC tirisi per la D la DE parallela alla BC, perchè dunque ad ^{2. di} un lato del triangolo ADE, cioè a ^{ques.} DE, si è tirata la BC parallela, farà come la AB alla BD, così la AC alla CE, ed è la BD uguale alla AC, adunque come la BA alla AC, così è la AC alla CE, laonde date due linee rette si è trovata la terza proporzionale, lo che bisognava fare.

PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE XII.

Date tre linee rette, trovare la quarta proporzionale.

Siano tre linee rette date A, B, C, bisogna trovare la quarta proporzionale. Propongasi due linee rette DE, DF, che contengano qualsivoglia angolo EDF, e pongasi la DG uguale alla linea A, e la GE uguale alla B, e la DH uguale alla C, e giunta GH tirisi per E la EF parallela ad
 H ₃ essa,



2. di
ques.

essa, e perchè ad un lato del triangolo DEF, cioè ad EF, si è tirata la CH parallela, sarà come la DG alla GE, così la DH alla HF, ed è la DC uguale alla A, e la GE alla B, e la DH alla C, come dunque la A alla B, così la C alla HF; laonde date tre linee rette si è trovata la quarta proporzionale, lo che bisognava fare.

P R O B L E M A V.

P R O P O S I Z I O N E XIII.

Date due linee rette, trovare la proporzionale di mezzo.

Siano due linee rette date AB, BC, bisogna trovare la proporzionale di mezzo. Pongansi per diritto, e nella AC descrivasi il mezzo cerchio ADC, e tirisi dal punto B la BD ad angoli retti sopra la AC, e giungansi AD, DC, perchè dunque nel mezzo cerchio è l'angolo ADC, quello sarà retto; e perchè nel triangolo rettangolo ADC dall'angolo retto alla base si è tirata la



31. del
terzo.

la perpendicolare DB, sarà DB pro- *Coroll.*
 porzionale di mezzo fra le parti della *dell' ot-*
 base AB, BC. Date dunque due li- *tava di*
 nee rette si è trovata la proporziona- *questo.*
 le di mezzo, lo che bisognava fare.

T E O R E M A IX.

PROPOSIZIONE XIV.

De' parallelogrammi uguali, ch'
 hanno un'angolo uguale ad un an-
 golo, i lati d'intorno agli angoli
 uguali si rispondono fra loro contra-
 riamente; e que' parallelogrammi,
 che hanno un angolo uguale ad un
 angolo, de' quali i lati d'intorno
 agli angoli uguali si rispondono con-
 trariamente, sono fra loro uguali.

Siano i parallelogrammi uguali AB,
 BC, che abbiano gli angoli al B u-
 guali, e pongansi per diritto DB,
 BE, faranno ancora per diritto FB,
 BG. Dico i lati, che sono d'intorno
 agli angoli uguali risponderfi contra-
 riamente fra loro, cioè come DB a
 BE, così essere GB a BF. Compia

H 4

scasi

*Affiom.*3. del
quinto.1. di
quesf.

scasi il parallelogrammo FE, e perchè il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC, ed è un alto parallelogrammo EF, farà come AB ad EF, così BC ad FE, ma come è AB ad FE, così è DB a BE, e come BC ad FE, così GB a BF, come dunque DB a BE, così a BF, onde i lati de' parallelogrammi AB, BC, che sono d'intorno

agli uguali angoli, si rispondono fra loro contrariamente. Ma rispondansi contrariamente fra loro i lati, che sono d'intorno agli uguali angoli, e sia come DB a BE, così GB a BF. Dico il paral-

1. di
quesf.*Affiom.*6. del
quinto.*Affiom.*7. del
quinto.

lelogrammo AB essere uguale al parallelogrammo BC, perciocchè essendo come DB a BE, così GB a BF, e come DB a BE, così il parallelogrammo AB al parallelogrammo FE, e come GB a BF, così il parallelogrammo BC al parallelogrammo FE, farà come AB ad FE, così BC ad FE, onde il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC, adunque de' parallelogrammi uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo,

Io, i lati d'intorno agli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente, e que' parallelogrammi, che hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati d'intorno agli angoli uguali si rispondono contrariamente, sono fra loro uguali, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A X.

PROPOSIZIONE XV.

De' triangoli uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati d'intorno agli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente: e que' triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati d'intorno agli uguali angoli si rispondono contrariamente, sono uguali fra loro.

Siano i triangoli ABC , ADE , che abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAC uguale all'angolo DAE . Dico i lati, che sono d'intorno agli uguali angoli con-

H 5

tra.

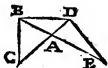
contrariamente risponderfi fra loro, cioè, come CA ad AD, così essere EA ad AB. Pongansi di modo, che CA sia per diritto ad AD, adunque EA ancora sarà per diritto ad AB, e giungansi B, D, perchè dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE, ed è un altro triangolo ABD, sarà come il triangolo CAB al triangolo BAD, così il triangolo ADE al triangolo BAD, ma come il triangolo CAB al triangolo

Affirm.

3. del
quinto.

1. di
ques.

BAD, così è CA ad AD, e come il triangolo EAD al triangolo BAD, così EA ad AB, come dunque



Affirm.

6. del
quinto.

CA ad AD, così EA ad AB, onde i lati de' triangoli ABC, ADE, che sono d'intorno agli uguali angoli, contrariamente si rispondono fra loro; ma rispondansi fra loro contrariamente i lati de' triangoli ABC, ADE, e sia come CA ad AD, così EA ad AB. Dico il triangolo ABC essere uguale al triangolo ADE, perciocchè giunti similmente B, D, essendo come CA ad AD, così EA ad AB, e come CA ad AD, così il triangolo ABC al triangolo BAD, e come EA ad AB,

1. di
ques.

AB, così il triangolo EAD al triangolo BAD, sarà come il triangolo ABC al triangolo BAD, così il triangolo EAD al triangolo BAD, onde l'uno, e l'altro de' triangoli ABC, ADE ha la medesima proporzione al triangolo BAD, e perciò il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE, adunque de' triangoli uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati d'intorno agli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente; e que' triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati d'intorno agli angoli uguali si rispondono contrariamente, sono uguali fra loro, lo che bisognava dimostrare.

Affiom.
6. del
quinto.

Affiom.
7. del
quinto.

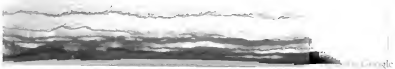
T E O R E M A XI.

PROPOSIZIONE XVI.

Se quattro linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo: e se il rettangolo contenuto dall'estreme sia uguale al ret-

H 6

tan.



tangolo , che si contiene da quelle di mezzo , le quattro linee rette saranno proporzionali .

Sieno quattro linee rette proporzionali AB, CD, E, F , e sia come la AB alla CD , così la E alla F . Dico, che il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, F è uguale a quello, che si contiene dalle CD, E . Tirinsi da' punti A, C le AG, CH ad angoli retti sopra le AB, CD , e pongansi la D AG uguale alla F , e la CH uguale alla E , e compiscansi i parallelogrammi BG, DH , perchè dunque come la AB alla CD , così è la E alla F , e la E è uguale alla CH , e la F alla AG ; sarà come la AB alla CD , così la CH alla AG , i lati dunque de' parallelogrammi equiangoli BG, DH , che sono d'intorno agli uguali angoli, si rispondono fra loro contrariamente, e perchè i lati de' parallelogrammi equiangoli, che sono d'intorno agli angoli uguali si rispondono contrariamente, però il

pa-



parallelogrammo BG è uguale al parallelogrammo DH, ed il parallelogrammo BG è quello che si contiene dalle linee rette AB, F, essendo la AG uguale alla F; ed il parallelogrammo DH è quello, che si contiene dalle CD, E, conciosiacosachè la CH sia uguale alla E, adunque il rettangolo contenuto dalle AB, F, è uguale a quello, che si contiene dalle CD, E.

Ma il rettangolo contenuto dalle AB, F sia uguale a quello, che si contiene dalle CD, E. Dico le quattro linee rette essere proporzionali, cioè come la AB alla CD, così essere la E alla F. Avendo fatte le medesime cose: perchè il rettangolo contenuto delle AB, F è uguale a quello, che si contiene dalle CD, E, e quello, che è contenuto dalle AB, F è il rettangolo BG, essendo la AG uguale alla F, ed il contenuto dalle CD, E è il rettangolo DH è uguale alla E: farà il parallelogrammo BG uguale al parallelogrammo DH, e sono equiangoli, ma de' parallelogrammi uguali, ed equiangoli i lati d'intorno agli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente, onde come è la AB alla CD, così è la CH alla AG, ma la

CH

14. di
ques.

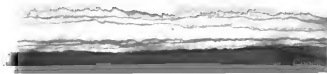
CH è uguale alla E, la AG alla F, come dunque la AB alla CD, così la E alla F, laonde se quattro linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo; e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, le quattro linee rette saranno proporzionali, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XII.

PROPOSIZIONE XVII.

Se tre linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo: e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo, le tre linee rette saranno proporzionali.

Siano tre linee rette proporzionali A, B, C, e sia come la A alla B, così



così la B alla C. Dico, che il rettangolo contenuto dalle A, C, è uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo, cioè dalla B. Pongasi la D uguale alla B, e perchè come è la A alla B, così è la B alla C, e la B è uguale alla D, farà come la A alla B, così la D alla C,

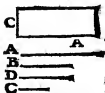
*Affiom.
3. del
quinto.*

ma se siano quattro linee rette proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, adunque il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale a quello, che si con-

tiene dalle B, D, ma il rettangolo contenuto dalle B, D è uguale al quadrato, che si fa dalla B, perciocchè la B è uguale alla D, il rettangolo dunque contenuto dalle A, C è uguale al quadrato, che si fa dalla B. Ma il rettangolo contenuto dalle A, C sia uguale al quadrato, che si fa dalla B. Dico come è la A alla B, così essere la B alla C. Avendo fatte le medesime cose, perchè il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al qua-

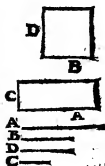


*Per
l' ant.*



*Per
l'ant.*

quadrato, che si fa dalla B, ed il quadrato, che si fa dalla B è il rettangolo contenuto dalle B, D, essendo la B uguale alla D; sarà il rettangolo contenuto dalle A, C uguale a quello, che si contiene dalle B, D; ma se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, saranno le quattro linee rette proporzionali: adunque come è la A alla B, così è la D alla C; ma la B è uguale alla D, onde come fa A alla B, così la B alla C; se dunque tre linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo; o se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo, le tre linee rette saranno proporzionali, lo che bisognava dimostrare.



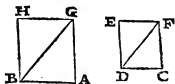
P R O.

PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE XVIII.

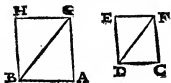
Dalla data retta linea descrivere un rettilineo simile, e similmente posto ad un rettilineo dato.

Sia la data retta linea AB , ed il dato rettilineo CE , bisogna dalla linea retta AB descrivere un rettilineo simile, e similmente posto al rettilineo CE , giungansi DF , e nella linea



retta AB , e ne' punti, che sono in essa, cioè AB , costituiscafi l'angolo GAB uguale all'angolo C , e l'angolo ABG uguale all'angolo CDF , adunque l'angolo rimanente CFD è uguale al rimanente AGB , ed il triangolo FCD è equiangolo al triangolo GAB ; similmente costituiscafi *quest.* nella linea retta BG , e ne' punti, che
sono

sono in essa BG l'angolo BGH uguale all'angolo DFE, e l'angolo GBH uguale all'angolo FDE; il rimanente dunque E è uguale al rimanente H; onde il triangolo FDE è equiangolo al triangolo GBH; e perchè l'angolo CFD è uguale all'angolo AGB, e l'angolo DFE all'angolo BGH, sarà tutto CFE uguale a tutto AGH;



nel medesimo modo si dimostrerà l'angolo CDE uguale all'angolo ABH, ed è il C uguale alla A, e l'angolo E all'angolo H; è dunque il rettilineo CE equiangolo al rettilineo AH. Perchè dunque è il triangolo CFD equiangolo al triangolo AGB, sarà come la CF alla FD, così la AG alla GB: similmente perchè il triangolo FDE è equiangolo al triangolo GBH, sarà come la DF alla FE, così la BG alla GH, e però per l'uguaglianza in proporzione ordinata, sarà come la CF alla FE, così la AG alla GH; simil.

20. del
quinto.

similmente si dimostrerà intorno agli altri angoli uguali de' rettilinei equiangoli CE , AH essere i lati proporzionali : dunque il rettilineo AH sarà simile al rettilineo CE ; laonde dalla data retta linea si è descritto un rettilineo simile, e similmente posto al rettilineo dato, lo che bisognava fare.

T E O R E M A XIII.

PROPOSIZIONE XIX.

I triangoli simili sono in proporzione doppia di quella, che hanno i lati omologhi fra loro.

Siano i triangoli ABC , DEF simili, che abbiano l'angolo B uguale all'angolo E , e sia come la AB alla BC , così la DE alla EF , dimodochè il lato BC sia omologo al lato EF . Dico il triangolo ABC al triangolo DEF avere doppia proporzione di quella, che ha la BC alla EF . Pigliasi la terza proporzionale BG delle BC , EF , dimodochè come è la BC
alla



11. di ques. alla EF, così sia la EF alla BG, e giungasi GA. Perchè dunque come è la AB alla BC, così è la DE alla EF, sarà permutandole come la AB alla DE, così la BC alla EF; ma come è la BC alla EF, così è la EF alla BG; come dunque la AB alla DE, così la EF alla BG, onde *Affiom. 6. del quinto.* i lati de' triangoli ABC, DEF, che *1. di ques.* sono d'intorno agli uguali angoli si rispondono contrariamente fra loro, ma quei triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati d'intorno agli uguali angoli si rispondono contrariamente, sono fra loro uguali; il triangolo dunque ABG è uguale al triangolo DEF; e perchè come la BC alla EF, così la EF alla BG, e le tre linee rette siano proporzionali la prima alla terza ha doppia porzione di quella, che ha alla seconda, averà la BC alla BG doppia porzione di quella, che ha la BC alla EF; ma come la BC alla BG, così il triangolo ABC al triangolo ABG; adunque eziandio il triangolo ABC al triangolo ABG ha doppia porzione



Defin. 12. del quinto. Prima di ques. al triangolo ABG ha doppia porzione

zione di quella, che ha la BC alla EF : ed è il triangolo ABG uguale al triangolo DEF ; laonde il triangolo ABC al triangolo DEF ha doppia proporzione di quella, che ha la BC alla EF ; adunque i triangoli simili sono in proporzione doppia di quella, che hanno i lati omologhi fra loro, lo che bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O .

Dalle cose dette di sopra è manifesto, che se tre linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così farà il triangolo fatto dalla prima, al triangolo fatto dalla seconda, simile, e similmente descritto.

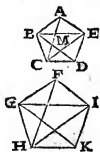
T E O R E M A XIV.

PROPOSIZIONE XX.

I poligoni simili si dividono in simili triangoli, ed uguali di numero, ed omologhi a tutti ; ed il poligo-

ligono al poligono ha proporzione doppia di quella, che ha il lato omologo al lato omologo.

Siano poligoni simili $ABCDE$, $FGHKI$, e sia il lato AB omologo al lato FG . Dico i poligoni $ABCDE$, $FGHKI$ dividerfi in simili triangoli, e di numero uguali, ed omologhi a tutti, ed il poligono $ABCDE$ al



poligono $FGHKI$, avere doppia proporzione di quella, che ha AB ad FG . Giungansi BE , EC , GI , IH , e perchè il poligono $ABCDE$ è simile al poligono $FGHKI$, l'angolo BAE è uguale all'angolo GFI , ed è come BA ad AE , così GF ad FI . Perchè dunque sono due triangoli ABE , FGI , che hanno un angolo uguale ad un angolo, e d'intorno agli uguali angoli i lati proporzionali sarà il triangolo ABE equiangolo al triangolo FGI , e perciò eziandio simile; l'angolo dunque ABE è uguale all'angolo FGI ; ed è tutto l'angolo ABC ugua-

4. di
ques.

uguale a tutto l'angolo FGH per la similitudine de' poligoni, onde il rimanente EBC è uguale al rimanente IGH ; e perchè per la similitudine de' triangoli ABE , FGI è come la EB alla BA , così la IG alla GF , e per la similitudine ancora de' poligoni, come la AB alla BC , così è la FG alla GH ; sarà per l'uguaglianza ordinata come la EB alla BC , così la IG alla GK : e d'intorno agli angoli uguali EBC , IGH i lati sono proporzionali; adunque il triangolo EBC è equiangolo al triangolo IGH : onde ancor è simile, e per la medesima ragione il triangolo ECD è simile al triangolo IHK , adunque i poligoni $ABCDE$, $FGHKI$ si dividono in simil triangoli, e di numero uguali. Dico anche omologhi a tutti, cioè, che i triangoli siano proporzionali, ed antecedenti essere ABE , EBC , ECD , ed i conseguenti loro FGI , IGH , IHK , ed il poligono $ABCDE$ al poligono $FGHKI$ avere doppia proporzione di quella, che ha il lato omologo al lato omologo, cioè AB , ad FG . Giungansi AC , FH , e perchè per la similitudine de' poligoni l'angolo ABC è uguale all'angolo FGH , ed è come la

AB

6. di
quesf.

AB alla BC, così la FG alla GH, farà il triangolo ABC equiangolo al triangolo FGH; è dunque uguale l'angolo BAC all'angolo GFH, e l'angolo BCA all'angolo GHF; oltre a ciò, perchè l'angolo BAM è uguale all'angolo GFN, e si è dimostrato l'angolo ABM uguale all'angolo FGN, farà ancora il rimanente AMB uguale al rimanente FNG, è dunque il triangolo ABM equiangolo al triangolo FGN. Dimostreremo parimente il triangolo BMC essere equiangolo al triangolo GNH, come dunque è la AM alla MB, così è la FN alla NG, e come la BM alla MC, così la GN alla NH; onde per l'uguaglià ordinata come la AM alla MC, così la FN alla NH; ma come la AM alla MC, così il triangolo ABM al triangolo MBC, ed il triangolo AME al triangolo EMC, perciocchè sono fra loro come le basi: e come uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti, come dunque il triangolo ABM al triangolo BMC, così il triangolo ABE al triangolo CBE; ma come AMB a

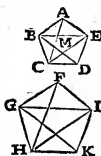
1. di
quesf.

12. del
prim.

1. di
quesf.

BMC, così la AM alla MC; onde
co-

come la AM alla MC , così il triangolo ABE al triangolo EBC , e per la medesima ragione come la FN alla NH , così il triangolo FGI , al triangolo GHI , ed è come la AM alla MC , così la FN alla NH ; adunque come il triangolo ABE al triangolo BEC , così il triangolo FCI al triangolo GHI , e permutandogli come il triangolo ABE al triangolo FGI , così il triangolo EBC al triangolo GHI . Dimostre-remo similmente giunte, che siano BD , GK , come il triangolo BEC al



triangolo GIH , così essere il triangolo ECD al triangolo IHK , e perchè come il triangolo ABE al triangolo FGI , così il triangolo EBC al triangolo IGH , ed ancora il triangolo ECD al triangolo IHK , farà come uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti; adunque come il triangolo ABE al triangolo FGI , così il poligono $ABCDE$ al poligono $FGHKI$; ma il triangolo ABE al triangolo FGI ha doppia

8. del
quinto.

Per
l'ant.

I

pro.

proporzione di quella, che ha il lato omologo AB al lato omologo FG , perciocchè i triangoli simili sono in doppia proporzione de' lati omologhi; adunque eziandio il poligono $ABCDE$ al poligono $FGHKI$ ha doppia proporzione di quella, che ha il lato omologo AB al lato omologo FG ; onde i poligoni simili si dividono in simili triangoli, ed uguali di numero, ed omologhi a tutti, ed il poligono al poligono ha proporzione doppia di quella, che ha il lato omologo al lato omologo, lo che bisognava dimostrare.

Al medesimo modo ancora ne' simili quadrilateri si dimostrerà quegli essere in doppia proporzione de' lati omologhi, e si è dimostrato eziandio ne' triangoli.

C O R O L L A R I O I.

Adunque universalmente le figure rettilinee simili fra loro sono in proporzione doppia di quella, che hanno i lati omologhi: e se delle $ABFG$ piglieremo la terza proporzionale, che sia X , averà la AB



alla X doppia proporzione di quella, che ha la AB alla FG; ma anche il poligono al poligono, ed il quadrilatero al quadrilatero ha proporzione doppia di quella, che ha il lato omologo al lato omologo, cioè AB ad FG, e questo ne' triangoli ancora è stato dimostrato.

C O R O L L A R I O II.

Laonde è manifesto universalmente che se tre linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così sarà la figura fatta dalla prima alla figura fatta dalla seconda, simile, e similmente descritta, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XV.

PROPOSIZIONE XXI.

I rettilinei simili ad un medesimo rettilineo, sono ancora simili fra loro.

Sia l'uno, e l'altro de' rettilinei A, B simile al rettilineo C. Dico il rettilineo A essere simile al rettilineo B; perciocchè essendo il rettilineo A simile al rettilineo C, sarà ancor equiangolo, e d'intorno agli uguali angoli averà i lati propor-



zionali; oltre a ciò; perchè il rettilineo B è simile al rettilineo C, sarà eziandio equiangolo ad esso, ed averà d'intorno agli uguali angoli i lati proporzionali; adunque l'uno, e l'altro de' rettilinei A B è equiangolo al C, ed ha d'intorno agli angoli uguali i lati proporzionali; onde il rettilineo A è equiangolo al B, ed ha i lati proporzionali d'intorno agli uguali angoli: e però il rettilineo A è simile al rettilineo B, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XVI.

PROPOSIZIONE XXI.

Se quattro linee rette, siano proporzionali, i rettilinei ancora, che
fi

si fanno da esse, simili, e similmente descritti, faranno proporzionali: e se i rettilinei, che si fanno da esse simili, e similmente descritti siano proporzionali, le linee rette ancora faranno proporzionali.

Siano quattro linee rette proporzionali AB, CD, EF, GH , e sia come la AB alla CD , così la EF alla GH : e descrivansi dalle AB, CD rettilinei simili, e similmente posti



18. di
ques.

KAB, LCD , e dalle EF, GH descrivasi rettilinei simili, e similmente posti MF, NG . Dico, che come il rettilineo KAB al rettilineo LCD , così è il rettilineo MF al rettilineo NG . Piglisi delle AB, CD la terza proporzionale O , e delle EF, GH la terza proporzionale X , e perchè come è la AB alla CD , così è la EF alla GH ; e come la CD alla O , così la GH alla X , sarà per l'uguaglianza in proporzione ordinata come la AB

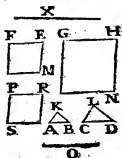
11. di
ques.

alla O, così la EF alla X; ma come
 la AB alla O, così è il rettilineo
Coroll. KAB al rettilineo LCD, e come la
 20. di EF alla X, così il rettilineo MF al
ques. rettilineo NG; adunque come il ret-
 tilineo KAB al rettilineo LCD, co-
Afsiom. sì è il rettilineo MF al rettilineo NC.
 6. del Ma sia come il rettilineo KAB al
quinto. rettilineo LCD, così il rettilineo MF
 al rettilineo NG. Dico come è la
 12. di AB alla CD, così essere la EF alla
ques. GH. Facciasi come la AB alla CD,
 così la EF alla PR, e descrivasi dal-
 la PR il rettilineo SR simile ad uno
 de' rettilinei MF, NG, e similmen-
 te posto. Perchè dunque è come AB
 alla CD, così la EF alla PR: e so-
 no descritti dalle AB, CD rettilinei
 simili, e similmente posti KAB, LCD,
 e dalle EF, PR rettilinei MF, SR
 simili, e similmente posti; sarà come
 il rettilineo KAB al rettilineo LCD,
 così il rettilineo MF al rettilineo RS:
 e si pone come il rettilineo KAB al
 rettilineo LCD, così il rettilineo
 MF al rettilineo NG: adunque co-
 me il rettilineo MF al rettilineo NG,
 così il rettilineo MF al rettilineo
 SR, ed avendo il rettilineo MF la
 medesima proporzione all' uno, e l'al-

tro di essi NG, SR, sarà il rettili-
neo NG uguale al rettilineo SR, ma
è ancora simile, e similmente posto,
adunque la GH è uguale alla PR,
e perchè come la AB

*Axiom.
7. del
quinto.*

alla CD, così è la
EF alla PR, ed è
la PR uguale alla
GH; sarà come la
AB alla CD, così
la EF alla GH; a-
dunque se quattro li-
nee rette siano pro-



porzionali i rettilinei ancora, che
fanno da esse simili, e similmente de-
scritti saranno proporzionali e se i
rettilinei, che si fanno da esse simili,
e similmente descritti siano proporzio-
nali, le linee rette ancora faranno
proporzionali, lo che bisognava dimo-
strare.

TEOREMA XVII.

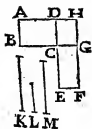
PROPOSIZIONE XXIII.

I parallelogrammi equiangoli han-
no fra loro la proporzione composta
de' lati.

I 4

Sia

Siano i parallelogrammi equiangoli AC , CF , che abbiano l'angolo BCD uguale all'angolo ECG . Dico il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF avere proporzione composta de' lati, cioè composta della proporzio-



14. del
prim.

12. di
ques.

1. di
ques.

Afsiom.

6. del
quinto.

ne, che ha la BC alla CG , e della proporzione, che ha la DC alla CE . Pongasi la BC per diritto alla CG , farà dunque la DE per diritto alla CE : e compiscasi il parallelogrammo DC , e proposta la linea retta K , facciasi come la BC alla CG , così la K alla L , e come la DC alla CE , così la L alla M , adunque le proporzioni di K ad L , e di L ad M sono le medesime, che le proporzioni de' lati BC a CG , e DC a CE ; ma la proporzione della K alla M è composta della proporzione della K alla L , e della proporzione della L alla M ; onde eziandio la K alla M ha proporzione composta de' lati, e perchè come la BC alla CG , così è il parallelogrammo AC al parallelogrammo CH , e come la BC alla CG , così la K alla L , farà come la K alla L .

la L , così il parallelogrammo AC al parallelogrammo CH . Similmente perchè come la DC alla CE , così è il parallelogrammo CH al parallelogrammo CF , e come la DC alla CE , così la L alla M , sarà come la L alla M , così il parallelogrammo CH al parallelogrammo CF , ed essendosi dimostrato, che come la K alla L , così il parallelogrammo AC al parallelogrammo CH , e come la L alla M , così il parallelogrammo CH al parallelogrammo CF , sarà per l'uguaglianza in proporzione ordinata come la K alla M , così il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF ; ma la K alla M ha la proporzione composta de' lati, adunque ancora il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF ; ma la K alla M ha la proporzione composta de' lati, adunque ancora il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF averà la proporzione composta de' lati: onde i parallelogrammi equiangoli hanno fra loro la proporzione composta de' lati, lo che bisognava dimostrare.

Axiom.
6. del
quinto.



I 5

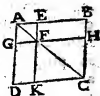
TEO,

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XXIV.

D'ogni parallelogrammo i parallelogrammi, che sono d'intorno al diametro, ed al tutto, e fra loro sono simili.

Sia il parallelogrammo ABCD, il cui diametro AC, e d'intorno al medesimo siano i parallelogrammi EG, HK. Dico essi, e a tutto ABCD,



e fra loro esser simili. Perchè ad uno de' lati del triangolo ABC, cioè a BC: si è tirata la EF parallela, sarà come la BE alla EA, così la CF alla FA. Similmente perchè ad un lato del triangolo ACD, cioè a CD si è tirata FG parallela, come la CF alla FA, così sarà la DG alla GA; ma come la CF alla FA, così si è dimostrata la BE alla EA, onde come la BE alla EA, così la DG alla GA; e componendole come la BA alla EA, così la DA alla AG, e permutandole come la BA alla AD,

co-

così le EA alla AG ; adunque de' parallelogrammi ABCD, EG i lati d'intorno all'angolo comune BAD sono proporzionali, e perchè la GF ^{29. del prim.} è parallela alla DC, l'angolo AGF è uguale all'angolo ADC, e l'angolo GFA uguale all'angolo DCA, e l'angolo DAC è comune a' due triangoli ADC, ACF ; sarà il triangolo ADC equiangolo al triangolo AGE e per la medesima ragione il triangolo ACB è equiangolo al triangolo AFE, adunque tutto il parallelogrammo ABCD è equiangolo al parallelogrammo EG, onde come la AD alla DC, così la AG alla GF : e come la DC alla CA, così la GF alla FA : e come la AC alla CB, così la AE alla FE ; oltre a ciò come la CB alla BA, così la FE alla EA. Perchè dunque si è dimostrato ; che come è la DC alla CA, così è la GF alla FA, e come la AC alla CB, così la AF alla FE, farà per l'ugualità in proporzione ordinata come la DC alla CB, così la GF alla FE, adunque de' parallelogrammi ABCD, EG, i lati sono proporzionali, che sono d'intorno agli uguali angoli, e però il parallelogrammo

4. di
ques.

21. di
ques.

mo $ABCD$ è simile al parallelogrammo EG . E per la medesima ragione il parallelogrammo $ABCD$ è simile al parallelogrammo KH , adunque l'uno, e l'altro di essi parallelogrammi EG , KH è simile al parallelogrammo $ABCD$, ma quelli, che sono simili al medesimo rettilineo sono simili ancora fra loro; onde il parallelogrammo EG è simile al parallelogrammo HK ; adunque d'ogni parallelogrammo i parallelogrammi, che sono d'intorno al diametro, ed al tutto, e fra loro sono simili, lo che bisognava dimostrare.

PROBLEMA VII.

PROPOSIZIONE XXV.

Costituire un rettilineo simile ad un dato rettilineo, e uguale ad un altro dato.

44. del
prim.

Sia il rettilineo dato ABC , al quale bisogni costituire un simile, e sia il rettilineo D al quale bisogni costituire uno uguale. Adattisi alla linea retta BC il parallelogrammo BE uguale al triangolo ABC , ed alla retta
CE

CE adattisi il parallelogrammo CM uguale al D nell'angolo FCE, che ^{14. del prim.} è uguale all'angolo CBL, la BC dunque è per diritto alla CF, e la LE alla EM. Piglisi delle BC, CF ^{13. di quesf.} la proporzionale di mezzo GH, e ^{18. di quesf.} dalla GH descrivasi il

triangolo KGH simile, e similmente posto al triangolo ABC, e perchè come la BC alla GH, così è la GH



alla CF; e se tre linee rette siano proporzionali come la prima alla terza, così è la figura, che si fa dalla prima a quella, che si fa dalla seconda, simile, e similmente descritta; sarà come la BC alla CF, così il triangolo ABC al triangolo KGH, ma come la BC alla CF, così il parallelogrammo BE al parallelogrammo EF, adunque come il ^{11. del quinto.} triangolo ABC al triangolo KGH, così il parallelogrammo BE al parallelogrammo EF: e permutandogli come il triangolo ABC al parallelogrammo BE, così il triangolo KGH al parallelogrammo EF; ma il triangolo ABC è uguale al parallelogrammo BE, il triangolo dunque KGH è ugua.

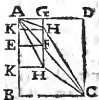
è uguale al parallelogrammo EF, ma il parallelogrammo EF è uguale al rettilineo D, onde eziandio il triangolo KGH è uguale al D : e KGH è simile al triangolo ABC, adunque si è costituito un rettilineo simile ad un dato rettilineo, ed uguale ad un altro dato, lo che bisognava fare.

T E O R E M A XIX.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se da un parallelogrammo si tragga un parallelogrammo simile al tutto, e similmente posto, che abbia un angolo comune con esso, quello sarà d'intorno al medesimo diametro col tutto.

Dal parallelogrammo ABCD traggasi il parallelogrammo AF simile al parallelogrammo ABCD, e similmente posto, che abbia l'angolo GAE comune con esso. Dico il parallelogrammo ABCD essere d'intorno al medesimo diametro col



col parallelogrammo AF, non già, ma se egli è possibile, sia il suo diametro AHC: e prolunghisi la GF fino al punto H, e tirisi per H ad una di esse AD, BC la parallela HK. Perchè dunque il parallelogrammo ABCD è d'intorno al medesimo diametro col parallelogrammo KG, sarà il parallelogrammo ABCD simile al parallelogrammo KG, adunque come la DA alla AB, così la GA alla AK: ed è per la similitudine de' parallelogrammi ABCD, EG, come la DA alla AB, così la GA alla AE, onde come è la GA alla AE, così è la GA alla AK: ed avendo la GA la medesima proporzione all'una e l'altra delle AK, AE sarà la AE uguale alla AK, la minore alla maggiore, lo che non è possibile, adunque il parallelogrammo ABCD non è d'intorno al medesimo diametro col parallelogrammo AH, e perciò sarà d'intorno al medesimo diametro con AE. Se dunque da un parallelogrammo si ritagga un parallelogrammo simile al tutto, e similmente posto, che abbia un angolo comune con esso, quello sarà d'intorno al medesimo diametro con tutto, lo che bisognava dimostrare.

TEO.

24. di

ques.

1. Def.

di ques.

Afsiom.

6. del

quinto.

Afsiom.

7. del

quinto.

T E O R E M A XX.

PROPOSIZIONE XXVII.

De' parallelogrammi adattati alla medesima linea retta, e che mancano di figure parallelogramme simili, e similmente poste a quella, che si descrive dalla metà, il maggiore di tutti è il parallelogrammo adattato alla metà, essendo simile al mancamento.

Sia la linea retta AB , e seghisi per mezzo nel punto C , ed alla linea retta AB adattisi il parallelogrammo AD , che manchi della figura parallelogramma DB , simile, e similmente posta a quella, che è descritta dalla metà di AB , cioè dalla CB . Dico de' parallelogrammi adattati alla linea retta AB , che mancano di figure parallelogramme simili, e similmente poste alla DB , il maggior di tutti essere il parallelogrammo AD . Adattisi alla linea ret-



ta AB il parallelogrammo AF, che manchi della figura parallelogramma FB simile, e similmente posta alla DB. Dico il parallelogrammo AD essere maggiore del parallelogrammo AF. Perciocchè essendo il parallelogrammo DB simile al parallelogrammo FB, sono d'intorno al medesimo diametro, tirisi il lor diametro DB, e desctivasi la figura, perchè dunque il parallelogrammo CF è uguale al parallelogrammo HE, pongasi comune lo FB, adunque tutto CH è uguale a tutto BE, ma CH è uguale a CG, perciocchè la linea retta AC è uguale alla CB, onde il parallelogrammo GC sarà uguale al parallelogrammo EB. Pongasi CF comune, adunque tutto il parallelogrammo AF è uguale allo gnomone LOF, e perciò il parallelogrammo DB, cioè AD, è maggiore del parallelogrammo AF, adunque de' parallelogrammi adattati alla medesima linea retta, che mancano di figure parallelogramme simili, e similmente poste a quella, che si descrive dalla metà, il maggior di tutti è il parallelogrammo adattato alla metà, lo che bisognava dimostrare.

PRO.

P R O B L E M A VIII.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Alla retta linea data adattare un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo, che manchi d'una figura parallelogramma simile ad un' altra data, ma bisogna che 'l dato rettilineo, al quale si deve adattare un parallelogrammo uguale, non sia maggiore di quello, che si adatta alla metà, essendo simili i mancamenti, e quello, che si fa dalla metà, e quello, al quale deve essere simile il mancamento.

Sia la data linea retta AB , ed il dato rettilineo, al quale bisogna adattare alla data linea AB un parallelogrammo uguale sia C , non maggiore di quello, che è adattato alla metà, essendo
i man-



i mancamenti simili, e quello al quale deve esser simile il mancamento sia D, bisogna alla data linea retta AB adattare un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C, che manchi della figura parallelogramma simile a D. Seghisi per mezzo la AB nel punto E, e dalla EB descrivasi un parallelogrammo simile, e similmente posto a D, che sia E B F G, e compiscasi il parallelogrammo A G, adunque A G o è uguale a C, o è maggiore di esso per la determinazione, e se A G sia uguale a C, già sarà fatto ciò, che si proponeva, perciocchè alla linea retta AB si è adattato un parallelogrammo A G uguale al dato rettilineo C, che manca della figura parallelogramma G B simile a D. Ma se non è uguale, sarà H E maggiore di C, ed è H E uguale a G B, onde G B è maggior di C; costituisca un parallelogrammo K M uguale all'eccesso, nel quale G B avanza C, e simile, e similmente posto a D; ma D è simile a G B; onde eziandio K M sarà simile a G B; sia dunque la retta linea K L omologa alla E G, e la L M omologa alla G F, e perchè il parallelogrammo G B è uguale a C, ed

- ed a KM , farà GB maggiore di KM , dunque la linea retta EG è maggiore della KL , e la GF della LM . Pongasi KG uguale alla KL , e la GO uguale alla LM , e compiscasi il parallelogrammo $XGOP$, onde il parallelogrammo GP , è uguale, e simile a KM , ma KM è simile a GB , adunque ancora GP è simile a GB : e per tal cagione GP è d'intorno al medesimo diametro con GB , sia il lor diametro GPB , e descrivasi la figura, perchè dunque GB è uguale a C , e KM , de' quali GP è uguale a KM , farà lo gnomone rimanente 3. 1. 4. uguale al rimanente C , e perchè OR è uguale a XS , pongasi PB comune, farà tutto OB uguale a tutto XB , ma XB è uguale a TE , conciossiachè il lato AE sia uguale al lato EB , onde ancor TE è uguale ad OB . Pongasi XS comune, adunque tutto TS è uguale a tutto lo gnomone 3. 1. 4. ma lo gnomone 3. 1. 4. è dimostrato uguale a C , e perciò TS sarà uguale a C , laonde alla retta linea data si è adattato un parallelogrammo uguale al dato rettangolo.



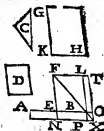
lineo, che manca della figura parallelogramma simile a una data, lo che bisognava fare.

P R O B L E M A IX.

PROPOSIZIONE XXIX.

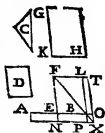
Alla retta linea data adattare un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo, che ecceda d'una figura parallelogramma simile ad un'altra data.

Sia la retta linea data AB , ed il rettilineo dato, al quale bisogna adattare un parallelogrammo uguale nella linea retta AB , sia C , e quello al quale l'eccesso deve esser simile sia D , adunque bisogna alla linea retta AB adattare un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C , che ecceda d'una figura parallelogramma simile a D . Seghisi la AB per mezzo nel punto E : e della EB descrivasi il parallelogrammo BF simile a D , e similmente posto: e costituisca il parallelogrammo GH uguale all'uno, e l'al.



l'altro BF, C , è simile a D , e similmente posto, adunque il parallelogrammo GH è simile ad FB , e sia KH il lato rispondente ad FL , e KG rispondente ad FE , e perchè il parallelogrammo GH è maggiore di FB , farà la linea retta KH maggiore di FL , e KG maggiore

di FE , prolunghisi FL , FE , ed a KH sia uguale FLT , ed a KG uguale FEN : e compiscasi il parallelogrammo TN , dunque il parallelogrammo TN è uguale, e simile a GH , ma GH è si-

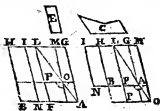


21. di d'intorno al medesimo diametro con
 ques. TN . Tirisi il lor diametro FX , e
 26. di descrivasi la figura, e perchè GH è
 ques. uguale all'uno, e l'altro EL, C , ed ancora è uguale a TN , farà TN uguale all'uno, e l'altro EL, C , traggaesi EL , che è comune, adunque lo gnomone rimanente $OX P$ è uguale a C , e perchè la linea AE è uguale alla EB , farà il parallelogrammo AN uguale al parallelogrammo NB cioè ad LO . Pongasi BX comune, adunque

que tutto AX è ugua'e allo gnomone $OX P$; ma lo gnomone $OX P$ è uguale a C , e perciò AX è uguale a C , laonde alla retta linea data AB si è adattato un parallelogrammo AX uguale al dato rettilineo C , che eccede di una figura parallelogramma, simile ad una data, lo che bisognava fare.

PROPOSIZIONI XXVIII., e
XXIX. del Sesto d' Euclide di-
mostrate congiuntamente dal
Torricelli.

Alla data linea AB applicare un parallelogrammo uguale al dato rettilineo C , e che manchi, o ecceda d'un parallelogrammo simile al dato E : ma bisogna, che quando si deve adattare il



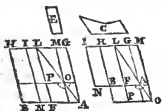
parallelogrammo, che manchi, ec. il dato rettilineo non sia maggiore del parallelogrammo, che è simile al dato, e che è descrivibile sopra la metà della linea data.

Se.

Propos. 13. del libro 6. Seghisi per mezzo la BA in F, e sopra la FA si faccia un rettilineo FG simile al dato E, che sarà parallelogrammo, e si compisca sopra tutta la data AB, il parallelogrammo AH, dipoi alla data BH nell'angolo BHI si applichi il parallelogrammo BI uguale al dato rettilineo C, e tra le GL, ed LI si prenda la media proporzione LM, e tirato il diametro LA si finisca la figura

Propos. 45. del lib. 1. dal punto M. Dico, che il parallelogrammo BO, che è adattato alla data AB,

Coroll. della Propos. 19. del 6.



e che nella prima figura ha il mancamento AO, e nella seconda ha l'eccesso AO simile all'FG, ovvero al dato E, è uguale all'altro dato rettilineo C.

Prop. 1. del 6. Imperciocchè la figura AL alla simil figura LO sta come la linea GL alla Afs. 7. linea LI delle tre GL, LM, LI in della continua proporzione, ovvero come la scienza desima figura AL alla figura LN, adunque i parallelogrammi OL, ed LN sono delle uguali, e nella prima figura, tutto LA è uguale.

è uguale a tutto LB, adunque il rimanente gnomone PAM è uguale al rimanente parallelogrammo BI.

Ma nella seconda figura, essendo tutto OL uguale a tutto LN, come poco fa Prop. 1. s'è provato, e la parte LA uguale alla del 6. parte LB, resterà lo gnomone PAM uguale al rimanente parallelogrammo BI. del 6. Prop. 1.

E' dunque in ciascuna figura il parallelogrammo BI uguale allo gnomone PAM, cioè al parallelogrammo BO: (perchè il BP è uguale al PA; ovvero allo AM, Per la medes. e aggiunto di comune FO, tutto BO è uguale a tutto lo gnomone PAM) ma il parallelogrammo BI è fatto uguale al rettilineo C, adunque anco il parallelogrammo BO sarà uguale al medesimo C, ed è il BO adattato alla data linea AB, e manca nella prima figura, ed eccede nella seconda, del parallelogrammo AO simile al dato E; che è quanto fu proposto di fare.

P R O B L E M A X.

PROPOSIZIONE XXX.

Segare una data linea retta terminata secondo l'estrema, e mezza proporzione.

K

Sia

46. del
prim.
Per
l'aut.

24. di
quesf.

Sia la data linea retta terminata AB , bisogna segarla secondo l'estrema, e mezza proporzione. Descrivasi dalla AB il quadrato BC , ed alla AC adattisi il parallelogrammo CD uguale a BC , che ecceda della figura AD simile a BC , ma BC è quadrato, adunque eziandio AD sarà quadrato, e perchè BC è uguale a CD , traggasi CE , che è comune, il rimanente dunque BF è uguale al rimanente AD , ed è equiangolo ad esso, il perchè i lati de' BF , AD , che sono d'intorno agli uguali angoli, si rispondono fra loro contrariamente: e perciò come FE ad ED così è AE ad EB : ed è FE uguale ad AC , cioè ad AB , ed ED ad AE , onde come AB ad AE , così AE ad EB , ma AB è maggiore di AE , adunque AE è maggiore di EB ; laonde la linea retta AB è segata nel punto E , secondo l'estrema, e mezza proporzione, lo che bisognava fare.



TEO.

Ne' triangoli rettangoli la figura, che si fa dal lato sottoposto all'angolo retto, è uguale alle figure fatte da' lati, che l'angolo retto contengono, simili, e similmente descritte.

Sia il triangolo rettangolo AEC , che abbia l'angolo retto EAC . Dico la figura, che si fa da EC , essere uguale a quel-



le, che si fanno da EA , AC simili, e similmente descritte. Tirisi la perpendicolare AD , perchè dunque nel triangolo rettangolo AEC dall'angolo retto A si è tirata la AD perpendicolare alla base EC , saranno i triangoli AED , ADC , che sono alla perpendicolare, simili al tutto AEC , 8. di
e fra loro, e perchè il triangolo AEC è simile al triangolo AED , farà come la CE alla EA , così la AE alla ED , ed essendo tre linee rette proporzionali, come la prima alla terza,

K 2

così

*Coroll.
della
20. di
ques.*

così farà la figura, che si fa dalla prima a quella, che si fa dalla seconda simile, e similmente descritta, adunque come la CE alla ED , così la figura, che si fa dalla CE , a quella, che si fa dalla EA simile, e similmente descritta, e per la medesima ragione come la EC alla CD , così la figura, che si fa dalla EC , a quella, che si fa dalla CA , onde come la EC alla DC , così è la figura, che si fa dalla EC , a quelle, che si fanno dalla EA AC simili, e similmente descritte: ma la EC è uguale alla ED , DC , adunque la figura, che si fa dalla EC è uguale a quelle, che si fanno dalle EA , AC simili, e similmente descritte, laonde ne' triangoli rettangoli la figura, che si fa dal lato sottoposto all'angolo retto, è uguale alle figure fatte da' lati, che l'angolo retto contengono simili, e similmente descritte, lo che bisognava dimostrare.

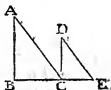
T E O R E M A XXII.

PROPOSIZIONE XXXII.

Se due triangoli siano composti ad un angolo, ed abbiano due lati propo-

porzionali a due lati, talmentechè i lati loro rispondenti siano ancor paralleli, faranno gli altri lati de' triangoli posti per diritto fra loro.

Siano due triangoli ABC , DCE , che abbiano due lati BA , AC proporzionali a due lati CD , DE , e sia come BA ad AC , così CD a DE , e la AB sia parallela alla DC , e la AC alla DE . Dico la BC essere per diritto alla CE , perciocchè essendo la AB parallela alla DC , e cadendo in esse una linea retta AC faranno gli angoli alterni BAC , ACD fra loro uguali, e per la medesima ragione l'angolo CDE è uguale all'angolo ACD ; onde altresì BAC è uguale a CDE , e perchè sono due triangoli ABC , DCE , che hanno un angolo A uguale ad un angolo D , e d'intorno agli uguali angoli i lati proporzionali, cioè come BA ad AC , così è CD a DE , sarà il triangolo ABC equiangolo al triangolo DCE , adunque l'angolo ABC è uguale all'angolo DCE : e si è dimostrato l'an-



29. del
prim.

6. di
ques.

K 3:

go.

14. del
prim.

golo ACD uguale all'angolo BAC ,
e però tutto ACE è uguale a' due
 ABC, BAC , pongasi l'angolo ACB
comune, gli angoli dunque ACE ,
 ACB sono uguali agli angoli BAC ,
 ACB, CBA , ma BAC, ACB ,
 CBA sono uguali a due retti, onde
eziandio gli angoli ACE, ACB fa-
ranno uguali a due retti, adunque ad
una linea retta AC , e al punto C in
essa due linee rette BC, CE , che
non sono poste dalle medesime parti,
fanno gli angoli da' lati ACE, ACB
uguali a due retti, e perciò BC sarà
per diritto a CE , onde, se due trian-
goli siano composti ad un angolo, ed
abbiano due lati proporzionali a due
lati, talmentechè i lati loro rispon-
denti siano ancor paralleli, faranno
gli altri lati de' triangoli posti per di-
ritto fra loro, lo che bisognava di-
mostrare.

T E O R E M A XXIII.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Ne' cerchi uguali gli angoli hanno
la medesima proporzione, che le cir-
conferenze, sopra le quali si ferma-
no,

no, o siano a' centri, ovvero alle circonferenze, ed oltre a ciò i settori ancora, come quegli, che sono posti a' centri.

Siano i cerchi uguali $ABCDEF$, ed a' loro centri G, H siano gli angoli BGC, EHF , ed alle circonferenze gli angoli BAC, EDF . Dico, che come la circonferenza BC alla circonferenza EF , così è l'angolo BGC all'angolo EHF , e l'angolo BAC all'angolo EDF , ed il settore ancora BGC al settore EHF . Pongansi quante si vogliano circonferenze CK, KL uguali alla BC , e similmente pongansi quante si vogliano circonferenze FM, MN uguali alla EF , e giungansi GK, GL, HM, HN , perchè dunque le circonferenze BC, CK, KL sono fra loro uguali, faranno altresì gli angoli BGC, CGK, KGL uguali fra loro, adunque quante volte la circonferenza LB è multiplice della circonferenza BC , tante volte l'angolo BGL è multiplice dell'angolo BGC : per la medesima ragione quante volte la circonferenza NE è multiplice della circonferenza

K 4. EF.,

EF, tante volte l'angolo EHN è multiplice dell'angolo EHF, se dunque la circonferenza BL è uguale alla circonferenza EN, l'angolo BGL farà uguale all'angolo EHN, e se la circonferenza BL è maggiore della circonferenza EN, l'angolo BGL farà maggiore dell'angolo EHN, e se minore, minore, essendo dunque quattro grandez-



ze, cioè due circonferenze BC, EF, e due angoli BGC, EHF si sono prese le ugualmente multiplici della circonferenza BC, e dell'angolo BGC, cioè la circonferenza BL, e l'angolo BGL, e le ugualmente multiplici della circonferenza EF, e dell'angolo EHF, cioè la circonferenza EN, e l'angolo EHN, e si è dimostrato, che se la circonferenza BL avanza la circonferenza EN, e l'angolo BGL avvanzerà l'angolo EHN, e se è uguale, farà uguale, e se minore, minore, onde come la circonferenza BC alla circonferenza EF, così è l'angolo BGC all'angolo EHF, ma come l'angolo BGC all'angolo EHF, così.

sì è l'angolo BAC all'angolo EDF , 9. del
 essendo ciascuno doppio di ciascuno, *quinto.*
 come dunque la circonferenza BC al- 20. del
 la circonferenza EF , così è ancor l' *terzo.*
 angolo BGC all'angolo EHF , e l'an-
 golo BAC all'angolo EDF , onde
 ne' cerchi uguali gli angoli hanno la
 medesima proporzione, che le circon-
 ferenze, sopra le quali si fermano o-
 siano a' centri, ovvero alle circonfe-
 renze. Dico oltre a ciò come la cir-
 conferenza BC alla circonferenza EF ,
 così essere il settore GBC al settore
 HEF . Giungansi BC , CK , e presi
 nelle circonferenze BC , CK , i pun-
 ti X , O , giungansi BX , XC , CO ,
 OK , e perchè le due BG , GC sono
 uguali alle due CG , GK , e contengono
 gli angoli uguali, sarà ancor la
 base BC uguale alla base CK , onde
 il triangolo GBC è uguale al trian-
 golo GCK ; e perchè la circonferenza
 BC è uguale alla circonferenza
 CK , eziandio la rimanente circonfe-
 renza, che compisce tutto il cerchio
 ABC , è uguale alla rimanente, che
 compisce il medesimo cerchio, adun-
 que ancor l'angolo BXC è uguale 27. del
 all'angolo COK , e la porzione BXC *terzo.*
 è simile alla porzione COK , e sono

K. 5

ncl.

11. Def. nelle uguali linee rette BC, CK , ma
 del serz. quelle porzioni simili de' cerchi, che
 24. del sono nelle uguali linee rette, sono
 serzo. fra loro uguali, adunque la porzione
 BXC è uguale alla porzione COK :
 ed è il triangolo BGC uguale al tri-
 angolo CGK , tutto dunque il setto-
 re BGC sarà uguale a tutto 'l setto-
 re CGK , e per la medesima ragione
 il settore GKL è uguale all'uno, e
 l'altro GKC, GCB , onde i tre set-
 tori BGC, CGK, KGL sono fra
 loro uguali, e parimente i settori H
 EF, HFM, HMN sono uguali fra
 loro, quante volte dunque la circon-
 ferenza LB è multiplice della circon-
 ferenza CB , tante volte il settore
 BGL è multiplice del settore BGC ,
 per la medesima ragione quante volte
 la circonferenza NE è multiplice del-
 la circonferenza EF , tante volte il
 settore EHN è multiplice del setto-
 re EHF , e però se la circonferenza
 BL è uguale alla circonferenza EN ,
 ed il settore BGL è uguale al setto-
 re EHN : e se la circonferenza BL
 avanza la circonferenza EN , ed il
 settore BGL avanza il settore EHN ,
 e se è minore, minore, essendo dun-
 que quattro grandezze le due circon-
 fe-

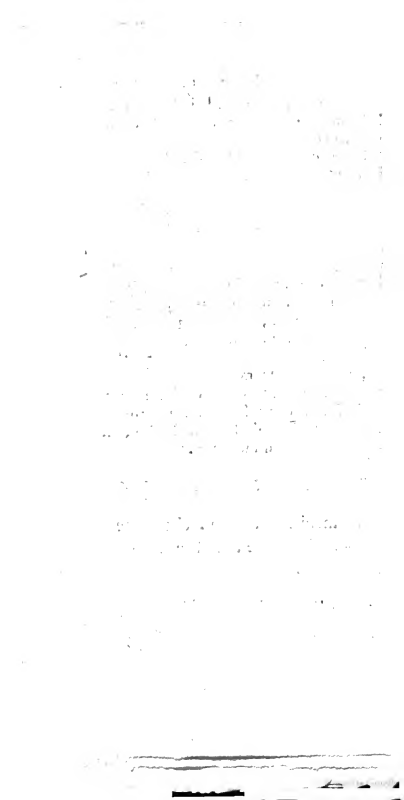
ferenze BC , EF , ed i due settori BGC , EHF , si sono prese le ugualmente multipli della circonferenza BC , e del settore BGC , la circonferenza BL , ed il settore BGL , è della circonferenza EF , e del settore EHF ugualmente multipli la circonferenza EN , ed il settore EHN ; e si è dimostrato, che se la circonferenza BL avanza la circonferenza EN , ed il settore BGL avanza il settore EHN , e se è uguale, uguale, e se minore, minore, adunque come la circonferenza BC alla circonferenza EF , così il settore BGC al settore EHF , lo che bisognava dimostrare.



COROLLARIO.

E' manifesto ancora, che come il settore al settore, così è l'angolo all'angolo.

Fine del Sesto Libro.





DEGLI
ELEMENTI
 D' EUCLIDE
 TRADOTTI IN VOLGARE
 LIBRO UNDECIMO,
E DE' SOLIDI
 LIBRO PRIMO.



DEFINIZIONI.

I.

Il solido è quello, che ha lunghezza, larghezza, e grossezza.

II.

Il termine del solido è la superficie.

III.

La linea retta è perpendicolare al piano, quando con tutte le linee ret-

ret-

rette, che la toccano, e sono nel soggetto piano, fa gli angoli retti.

IV.

Il piano al piano è retto, ovvero perpendicolare, quando in un piano tirate le linee rette perpendicolari sopra il comun segmento de' piani saranno all'altro piano perpendicolari.

V.

L'inclinazione della linea retta ad un piano è, quando dal termine sublime della linea retta sia tirata la perpendicolare al piano, e dal punto fatto sia tirata un'altra linea fin al termine di essa posto nel piano, l'angolo acuto, che si contiene dalla linea tirata, e dalla linea, che sta ferma.

VI.

L'inclinazione del piano ad un altro piano è l'angolo acuto, che si contiene da linee rette, le quali
al

al comun segamento de' piani sono tirate ad angoli retti, nell'uno, e l'altro piano.

VII.

Il piano al piano similmente è detto inclinarsi, e l'altro all' altro, quando gli angoli della inclinazione sono uguali fra loro.

VIII.

I piani paralleli sono quelli, che non si congiungono mai insieme.

IX.

Le figure solide simili sono quelle, che si contengono da' piani simili uguali di numero.

X.

Le figure solide simili, e uguali sono quelle, che si contengono da' piani simili, ed uguali di numero, e grandezza.

XI.

L'angolo solido è l'inclinazione di più, che di due linee, le quali
fi

fi tocchino , e non fiano nella medefima fuperficie con tutte l'altre linee ; ovvero l'angolo folido è quello , che fi comprende da più , che da due angoli piani , che non fiano nel medefimo piano , e fi terminino ad un punto ..

XII.

La piramide è una figura folida compresa da' piani , la quale da un piano fi costituisce ad un punto .

XIII.

Il prisma è una figura folida compresa da' piani , de' quali due , che fono oppofti , fono uguali , e fimili , e paralleli , ma gli altri fono parallelogrammi .

XIV.

La ffera è una figura compresa , quando il mezzo cerchio fi gira d'intorno al diametro , che fta fermo , fin' a tanto , che fia riportato di nuovo al medefimo luogo , dal quale cominciò a muoverfi . L'af-

XV.

L' asse della sfera è una linea retta, che sta ferma, d' intorno alla quale il mezzo cerchio si gira.

XVI.

Il centro della sfera è il medesimo, che del mezzo cerchio.

XVII.

Il diametro della sfera è una linea retta, che passa per lo centro, e dall' una e l' altra parte è terminata dalla superficie della sfera.

XVIII.

Il cono è una figura compresa, quando stando fermo un lato del triangolo rettangolo, di quelli, che sono d' intorno all' angolo retto, il triangolo si gira fin' a tanto, che di nuovo sia riportato al medesimo luogo, dal quale cominciò a muoversi; e se la linea retta, che sta ferma, è uguale all' altro lato, che si gira d' intorno all' angolo retto, il cono
fa.

farà rettangolo ovvero ortogonio , ma se è minore , farà ottusiangolo , e se maggiore , farà acutangolo .

XIX.

L'asse del cono è la linea retta , che sta ferma , d'intorno alla quale il triangolo si gira .

XX.

Ma la base è il cerchio descritto dalla linea retta , che si gira .

XXI.

Il cilindro è una figura compresa , quando stando fermo un lato del parallelogrammo ortogonio di quelli , che sono d'intorno all'angolo retto , il parallelogrammo si giri infino a tanto , che di nuovo torni al medesimo luogo , dal quale cominciò a muoversi .

XXII.

L'asse del cilindro è la linea retta , che sta ferma , d'intorno alla quale il parallelogrammo si gira .

La

XXIII.

La base sono i cerchi descritti da' due lati opposti, che si girano.

XXIV.

I conì, e cilindri simili sono quelli, de' quali gli assi, e i diametri delle basi hanno la medesima proporzione.

XXV.

Il Cubo è una figura solida, contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI.

Il Tetraedro, ovvero piramide è figura solida compresa da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

XXVII.

L' Ottaedro è una figura solida compresa da otto triangoli uguali, ed equilateri.

XXVIII.

Il Dodecaedro è una figura solida, che è contenuta da dodici pentagoni uguali, equilateri, ed equiangoli.

L' Ico-

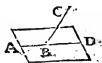
L' Icosaedro è una figura solida ,
che' è compresa da venti triangoli
uguali , ed equilateri .

T E O R E M A I.

PROPOSIZIONE I.

Della linea non n'è parte nel
soggetto piano , e parte in un piano
elevato .

Perciocchè , se egli
è possibile , una parte
AB della linea retta
ABC sia nel sogget-
to piano , e la parte
BC nel piano elevato ; farà una li-
nea retta continuata nel soggetto pia-
no per diritto alla AB , sia la BD ;
adunque a due linee rette date ABC ,
ABD . è comune la porzione AB , che
non è possibile , perciocchè una linea
retta con un' altra linea retta non con-
viene in più d' un punto , altrimenti
le linee rette converranno insieme ,
adunque della linea retta non n'è par-
te nel soggetto piano , e parte in un
piano elevato .



TEO.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

Se due linee rette si segano fra loro, sono in un piano, ed ogni triangolo consiste in un piano.

Due linee rette AB, CD seghinsi fra loro nel punto E . Dico le AB, CD essere in un piano, ed ogni triangolo consistere in un piano. Piglinsi nelle EB, EC quali punti si vogliano F, G , e giungansi CB, FG , e tirinsi FK, GH . Dico prima il triangolo ECB essere in un piano, perciocchè, se del triangolo ECB una parte FKC ovvero GBH è nel soggetto piano, e la rimanente in un altro piano, sarà anche di una delle linee EB, EC parte nel soggetto piano, e parte nell'altro, e se del triangolo ECB una parte FG, BC sia nel soggetto piano, e la rimanente in un altro, di amendue le linee rette EC, EB una parte sarà nel soggetto piano, ed una in altro, lo che dimostrammo essere inconveniente, dunque



*Per
l'ant.*

que il triangolo EBC è in un piano, ed in qual piano è il triangolo EBC , nel medesimo sono amendue le linee rette EC , EB , ed in quale amendue EC , EB , nel medesimo sono le AB , CD , adunque le linee rette AB , CD sono in un piano, ed ogni triangolo consiste in un piano.

T E O R E M A III.

PROPOSIZIONE III.

Se due piani si seghino fra loro, il comun segamento è una linea retta.

Due piani AB , BC seghinfi fra loro, ed il comun segamento loro sia la linea DB . Dico la linea retta DB essere retta, per-



ciocchè, se non sia così tirisi dal punto D al B nel piano AB la linea retta DFB , e nel piano BC la linea retta DEB , saranno i medesimi termini di due linee rette DEB , DFB , ed esse conterranno uno spazio, che è inconveniente, adunque le DEB , DFB non sono linee rette; similmente di-

mo.

mostreremo niun'altra, che si tira dal punto D al B essere retta, fuori che la DB, cioè il comun segamento de' piani AB, BC, se dunque due piani si seghino fra loro in comun segamento sarà una linea retta, lo che, ec.

T E O R E M A IV.

PROPOSIZIONE IV.

Se una retta linea a due linee rette, che si segano fra loro, nel comun segamento è perpendicolare, sarà anco perpendicolare al piano, che passa per le dette linee.

Sia la linea retta EF perpendicolare a due linee rette AB, CD, che nel punto E fra loro si segano, e sia la perpendicolare alzata sopra il punto E. Dico la AF eziandio esser perpendicolare sopra il piano che passa per le AB, CD. Piglinsi le linee rette AE, EB, CE, ED uguali fra loro: e per E tirisi la linea retta GEH in qualunque modo, e giungansi AD, CB, poi da qualsivoglia punto F tirinsi le FA, FG, FD, FC,

FC, FH, PB ; e perchè due linee rette AE, ED sono uguali a due li-

4. del
prim. nee rette CE, EB , e contengono angoli uguali, farà la base AD uguale alla base CB , ed il triangolo

AED uguale al trian-

golo CEB , adunque

ancor l'angolo DAE è

uguale all'angolo EBC :

e l'angolo AEG è ugua-

le all'angolo BEH ; sono

adunque due triangoli

AEG, BEH , che hanno due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed un lato AE uguale ad un lato EB , che è d'interno agli angoli uguali, onde averanno gli altri lati uguali agli altri lati; e però GE è uguale ad EH , ed AG a BH ; ed essendo la AE uguale alla EB , e la FE comune, e ad angoli retti, farà la base AE uguale alla base EB , e per la medesima ragione ancora la CF farà uguale alla FD ; oltre a ciò, perchè la AD è uguale alla CB , e la AF alla FB , faranno le due FA, AD uguali alle due FB, BC , l'una all'altra; e si è dimostrata la base DF uguale alla base FC , adunque l'angolo FAD è uguale all'angolo FBC :



26. del
prim.

tro, ed un lato AE uguale ad un lato EB , che è d'interno agli angoli uguali, onde averanno gli altri lati uguali agli altri lati; e però GE è uguale ad EH , ed AG a BH ; ed essendo la AE uguale alla EB , e la FE comune, e ad angoli retti, farà la base AE uguale alla base EB , e per la medesima ragione ancora la CF farà uguale alla FD ; oltre a ciò, perchè la AD è uguale alla CB , e la AF alla FB , faranno le due FA, AD uguali alle due FB, BC , l'una all'altra; e si è dimostrata la base DF uguale alla base FC , adunque l'angolo FAD è uguale all'angolo FBC :

4. del
prim.

la base AE uguale alla base EB , e per la medesima ragione ancora la CF farà uguale alla FD ; oltre a ciò, perchè la AD è uguale alla CB , e la AF alla FB , faranno le due FA, AD uguali alle due FB, BC , l'una all'altra; e si è dimostrata la base DF uguale alla base FC , adunque l'angolo FAD è uguale all'angolo FBC :

3. del
prim.

lo FAD è uguale all'angolo FBC :

e la

e la AG si è dimostrata uguale alla BH : ma ancor la AF è uguale alla FB ; le due adunque FA , AG sono uguali alle due FB , BH , e l'angolo FAG è uguale all'angolo FBH , come si è dimostrato, onde la base GF è uguale alla base FH . E perchè si è dimostrata la GE uguale alla EH , e la FE comune, saranno le due GE , EF uguali alle due HE , EF , e la base HF è uguale alla base FG ; l'angolo dunque GEF è uguale all'angolo HEF , e però amendue gli angoli GEF , HEF sono retti, adunque la FE alla GH tirata in qualunque modo per E fa gli angoli retti, similmente dimostreremo la FE con tutte le linee rette, che la toccano; e sono nel soggetto piano, fare gli angoli retti, ma la linea retta è perpendicolare al piano, quando colle linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo piano, fa gli angoli retti; onde la FE è perpendicolare al soggetto piano, ma il soggetto piano è quello, che passa per le linee rette AB , CD , adunque la FE sarà perpendicola.

4. del prim.

3. def.



nea retta , e sia BF , sono dunque in un piano , che passa per le AB , BC tre linee rette AB , BC , BF , e perchè la AB è perpendicolare all' una , e l' altra BD , BE , sarà anche perpendicolare al piano , che passa per le DB , BE , ma il piano , che passa per le DB , BE è piano soggetto , adunque la AB è perpendicolare al soggetto piano , e però sarà perpendicolare a tutte le linee rette , che la toccano , e sono nel medesimo piano , ma BF , che è nel soggetto piano , la tocca , adunque l' angolo ABF è retto , e si pone retto l' angolo ABC , è dunque l' angolo ABF all' angolo ABC uguale , e sono nel medesimo piano , che non è possibile , laonde la linea BC non è in un piano elevato , dal che ne seguita , che le tre linee rette BC , BD , BE siano in un piano , se dunque una retta linea a tre linee rette , che si toccano fra loro nel comun segamento è perpendicolare , faranno le dette tre linee in un medesimo piano.

*Per
l' ant.*

3. def.



PROPOSIZIONE VI.

Se due linee rette faranno perpendicolari ad un medesimo piano, faranno parallele fra loro.

Due linee rette AB , CD siano perpendicolari al soggetto piano. Dico la AB essere parallela alla CD . Tocchino le AB , CD il soggetto piano ne' punti B , D , e tirisi la linea retta BD , alla quale nel soggetto piano tirisi la DE perpendicolare, e posta la DE uguale alla AB , giungansi BE , AE , AD , perchè dunque la AB è perpendicolare al soggetto piano, con tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel soggetto piano, farà gli angoli retti, ma l'una, e l'altra BD , BE tocca la AB , essendo nel sog-



Def. 5. getto piano, adunque amendue gli angoli ABD , ABE sono retti; per la medesima ragione ancora sono retti amendue CDB , CDE , e perchè la AB è uguale alla DE , e la BD è comune, faran-

faranno le due AB , BD uguali alle due ED , DB , e contengano angoli retti, la base dunque AD è uguale alla base BE , similmente perchè la AB è uguale alla DE , e la AD alla BE , le due AB , BE sono uguali alle due ED , DA , e la base di esse AE è comune, l'angolo dunque ABE è uguale all'angolo EDA : ma ABE è retto, adunque è retto EDA , e però la ED è perpendicolare alla DA , ma eziandio è perpendicolare all'una, e l'altra di esse BD , DC , onde la ED è perpendicolare alle tre linee rette BD , DA , DC , nel toccamento, e per tal ragione le tre linee rette BD , DA , DC sono in un piano, ed in qual piano sono le BD , DA , nel medesimo è la AB , perciocchè ogni triangolo è in un piano, adunque è necessario, che le AB , BD , DC siano in un piano, ed amendue gli angoli ABD , BDC sono retti, la AB dunque è parallela alla CD , onde se due linee rette faranno perpendicolari ad un medesimo piano, faranno parallele fra loro.

8. del
prim.

28. del
prim.

PROPOSIZIONE VII.

Se due linee rette siano parallele, e nell' una, e l' altra di loro si piglino quali punti si vogliano, la linea retta, che congiunge detti punti, farà nel medesimo piano, nel quale sono le parallele.

Siano due linee rette parallele AB , CD , ed in amendue piglinsi quali punti si vogliano E , F . Dico la linea retta, che congiunge i punti E , F , essere nel medesimo piano, nel quale sono le parallele. Sia, s' egli è possibile, in un piano elevato, come EGF , e per la EGF tirisi un pia-

3. di
ques. no, il quale farà il sega-
mento nel soggetto pia-
no, una linea retta; fac-
cialo come EF , adunque



due linee rette EGF , EF conterranno uno spazio, che non è possibile, e perciò quella linea retta, che è tirata dal punto E ad F , non è in un piano elevato, onde sarà in quello, che passa per le parallele AB , CD ,
se dun-

se dunque due linee rette siano parallele, ec. lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A V I I I .
PROPOSIZIONE V I I I .

Se due linee rette siano parallele, e l'una di loro sia perpendicolare a qualche piano, l'altra ancora al medesimo piano sarà perpendicolare.

Siano due linee rette parallele AB , CD , ed una di esse AB sia perpendicolare al soggetto piano. Dico ancora la rimanente CD



essere al medesimo piano perpendicolare. Tocchino le AB , CD il soggetto piano ne' punti B , D , e giungasi BD , adunque le AB , CD , BD sono in un piano, tirisi la DE nel soggetto piano perpendicolare alla BD , e pongasi la DE , uguale alla AB , e giungansi BE , AE , AD , e perchè la AB è perpendicolare al soggetto piano, ancora a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel soggetto piano sarà perpendicolare; a
dua.

Per
l'ant.

3. def.

- dunque amendue gli angoli ABD , ABE sono retti; e cadendo la BD nelle linee rette parallele AB , CD faranno gli angoli ABD , CDB uguali a due retti, ma è retto ABD , adunque ancor CDB è retto; e però la CD è perpendicolare alla BD ; e perchè la AB è uguale alla DE , e la BD comune, le due AB , BD sono uguali alla due ED , DB , e l'angolo ABD è uguale all'angolo EDB , perciocchè amendue sono retti;
29. *del prim.* adunque la base AD è uguale alla base BE , similmente perchè la AB è uguale alla DE , e la BE alla AD , faranno le due AB , BE uguali alle due ED , DA , l'una all'altra, e la base loro AE è comune, onde l'angolo ABE è uguale all'angolo EDA ; ed è retto ABE , adunque ancor EDA è retto, e la ED è perpendicolare alla DA , ma è perpendicolare eziandio alla BD : adunque ancor la ED sarà perpendicolare al piano, che passa per le BD , DA , e con tutte le linee rette, che essendo nel medesimo piano la toccano, farà angoli retti, ma la DC è nel piano, che passa per le BA , AD , perchè nel piano per le BD , BA sono le AB , BD ,

BD, e la DC; onde la ED è perpendicolare alla DC; e però la CD è perpendicolare alla DE, ma ancor la CD è perpendicolare alla DB, adunque la CD a due linee rette DE, DB, che si segano fra loro, nel comun legamento D. è perpendicolare, e però è perpendicolare al piano, che passa per le DE, DB, ma il piano per le DE, DB è il soggetto piano, adunque la CD al soggetto piano sarà perpendicolare, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A IX.

PROPOSIZIONE IX.

Le linee parallele ad una medesima, che non sono nel medesimo piano, sono altresì fra loro parallele.

Siano amendue AB, CD parallele alla EF, e non siano nel medesimo piano, nel quale è essa. Dico la AB essere



parallela alla CD. Piglisi nella EF qualsivoglia punto G, dal quale si tirì la GH perpendicolare alla EF nel

L 5

pia-

- piaoo, che passa per le EF, AB, e nel piano, che passa per EF, CD, tirisi la GK perpendicolare alla EF, e perchè la EF è ad amendue GH, GK perpendicolare, sarà ancora perpendicolare al piano, che passa per le GH, GK, e la FE è parallela alla AB, adunque anche la AB è perpendicolare al piano, che passa per HGK, e per la medesima ragione la CD è perpendicolare al piano per la HGK, onde amendue le AB, CD saranno perpendicolari al piano, che passa per le HGK, ma se due linee rette sono perpendicolari ad un medesimo piano, sono parallele fra loro, adunque la AB è parallela alla CD, che è quello, che bisognava dimostrare.
4. *def.*
di ques.
Per
l'ant.
 6. *di*
ques.

T E O R E M A X.

PROPOSIZIONE X.

Se due linee, che si toccano sono parallele a due altre linee, che si toccano, ma non nel medesimo piano, contengono angoli uguali.

Siano due linee rette, che si toc-
cano

ieno AB , BC parallele a due altre, che si toccano DE , EF , ma non nel medesimo piano. Dico l'angolo ABC essere uguale all'angolo DEF . Pigliansi le BA , BC , ED , EF fra loro uguali, e giungansi AD , CF , BE , AC , DF , perchè dunque la BA è uguale, e paralle-

la alla ED , sarà ancora la AD uguale, e parallela alla BE , e per la medesima ragione la CF



sarà uguale, e parallela alla BE ; amene due dunque AD , CF sono uguali, e parallele alla BE , e quelle, che sono parallele alla medesima linea retta, e non sono nel medesimo piano, l' ant.

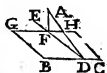
nel quale è essa, sono fra loro parallele, onde la AD è parallela alla CF , ed è uguale; ed AC , DF le congiungono, adunque la AC è uguale, e parallela alla DE ; e perchè due linee rette AB , BC sono uguali a due DE , EF , e la base AC è uguale alla base DF , sarà l'angolo ABC uguale all'angolo DEF , adunque se due linee rette, che si toccano sono parallele a due altre, che si toccano, ma non nel medesimo piano, contengono angoli uguali, lo che bisognava dimostrare. *PRO.*

Per
33. del prim.
8. del prim.

PROPOSIZIONE XI.

Da un punto sublime dato tirare una linea retta perpendicolare al soggetto piano.

Sia il dato punto sublime A, e sia dato il soggetto piano, bisogna dal punto A tirare una linea retta



12. del prim. perpendicolare al soggetto piano. Tirisi nel soggetto piano una linea retta in qualunque modo BC; e dal punto A alla BC tirisi la perpendicolare AD, se la AD sia perpendicolare anco al soggetto piano, già sarà fatto ciò, che si proponeva, ma se nò, tirisi dal punto D la DE perpendicolare alla BC nel soggetto piano, e dal punto A alla DE tirisi la AF perpendicolare, e finalmente per F tirisi la GH parallela alla BC, e perchè la BC è perpendicolare ad amendue le DA, DE, sarà ancor la BC perpendicolare al piano, che pas.
11. del prim. r1. del prim. 31. del prim. 4. di quesf. 8. di quesf.

passa per le ED , DA , ed è la GH parallela ad essa, e se sono due linee rette parallele, l'una delle quali sia perpendicolare a qualche piano, l'altra ancora sarà al medesimo piano perpendicolare; onde ancor la GH è perpendicolare al piano, che passa per le ED , DA , e però è perpendicolare a tutte le linee rette, che essendo nel medesimo piano la toccano, ma AF la tocca, quale è nel medesimo piano, che passa per le ED , DA , adunque la GH , è perpendicolare alla FA ; e però la FA è perpendicolare alla GH , ed è la AF perpendicolare alla DE , adunque la AF è ad amendue HG , DE perpendicolare, e se una retta linea a due linee rette, che si segano fra loro nel comun segamento è perpendicolare, sarà ancor perpendicolare al piano, che passa per le dette linee, onde la FA è perpendicolare al piano, che passa per le ED , GH , ma il piano per le ED , GH è il soggetto piano, adunque la AF al soggetto piano è perpendicolare, e perciò da un punto sublime dato si è tirata una linea retta perpendicolare al soggetto piano, lo che bisognava fare.

PRO.

Dal punto, che sia in un piano dato, costituire una linea retta perpendicolare al detto piano.

Sia dato il piano soggetto, ed un punto, che è in esso, sia A, bisogna dal punto A costituire una linea retta



perpendicolare al soggetto piano: intendasi qualche punto sublime B, dal quale si tiri la BC perpendicolare al soggetto piano, e per A tirisi la AD parallela alla BC, perchè dunque due linee rette sono parallele AD, CB, ed una di esse BC è perpendicolare al soggetto piano, ancor la rimanente AD, sarà al soggetto piano perpendicolare, laonde dal punto, che è in un piano dato, si è costituita una linea retta perpendicolare al detto piano, lo che bisognava fare.

*Per
l' ant.
13. del
prim.*

*8. di
ques.*

Dal punto, che sia in un piano da-

dato, non si costituiranno due linee rette perpendicolari al detto piano dalla medesima parte.

S' egli è possibile, dal punto A, che è nel dato piano costituiransi due linee rette AB, AC dalla medesima parte perpendicolari ad esso: e tirisi un piano per le BA, AC, che farà il sega-mento per lo punto A nel soggetto piano una linea retta, faccia la DAE, adunque le linee rette AB, AC, DAE sono in un piano, e perchè la CA è al soggetto piano perpendicolare, sarà perpendicolare a tutte le linee rette, che essendo nel medesimo piano, la toccano, ma DA E la tocca, che è nel soggetto piano, onde l'angolo CAE è retto, per la medesima ragione è retto BAE, l'angolo dunque CAE è uguale a BAE, e sono in un piano, che non è possibile, laonde dal punto, che sia in un dato piano, non si costituiranno due linee rette perpendicolari al piano dalla medesima parte, lo che bisognava dimostrare.



3. di

ques.

3. def.

TEO.

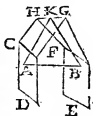
256 E U C L I D E
T E O R E M A X I I I .
PROPOSIZIONE XIV.

Que' piani sono paralleli fra loro, a' quali la medesima linea retta è perpendicolare

Sia la linea retta AB perpendicolare all' uno, e l' altro piano CD , EF . Dico detti piani essere paralleli.

2. *di* Se non è così, prolungati si congiungeranno insieme, congiungansi, e facciano il comun segamento la linea retta GH , ed in essa GH preso qualsivoglia punto K , giungansi AK , BK , perchè dunque la AB è perpendicolare al piano EF , sarà perpendicolare alla BK , essendo la linea retta nel piano EF prolungato, onde l' angolo ABK è retto, e per la medesima ragione BAK è retto, e del triangolo ABK due angoli ABK , BAK sono uguali a due retti, che non è possibile, adunque i piani CD , EF prolungati non si congiungeranno insieme, e però è necessario.

9. *def.*



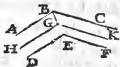
effario, che CD , EF siano paralleli, onde que' piani sono paralleli fra loro, a' quali la medesima linea retta è perpendicolare; lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XIII.

PROPOSIZIONE XV.

Se due linee rette, che si toccano, siano parallele a due altre linee, che si toccano, ma non nel medesimo piano, ancor i piani, che passano per le dette linee, faranno paralleli fra loro.

Due linee rette, che si toccano AB , BC siano parallele a due altre, che si toccano DE , EF , e non nel medesimo piano. Dico i piani, che passano per le AB , BC , DE , EF , se si prolunghino, non congiungersi insieme. Tirisi dal punto B al piano, che passa per le DE , EF , la perpendicolare BG , che tocchi il piano nel punto G ; e per G tirisi



tirisi la GH parallela alla ED , e la GK parallela alla EF , perchè dunque la BG è perpendicolare al piano, che passa per le DE , EF , sarà ancora perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo

3. *def.* piano, e amendue GH , GK la toccano, che sono nel medesimo piano, adunque l' uno, e l' altro angolo BGH , BGK è retto, e perchè la BA è parallela alla GH , gli angoli

29. *del prim.* GBA , BGH sono uguali a due retti, e BGH è retto, adunque anche GBA sarà retto, e però la GB è perpendicolare alla BA , e per la medesima ragione la GB è perpendicolare alla BC , essendo dunque la BG perpendicolare alle

due linee rette BA , BC , che si segano fra loro, sarà ancor la BG



perpendicolare al piano, che passa per le AB , BC , e per la medesima ra-

4. *di ques.* gione la BG è perpendicolare al piano per le HG , GK , ma il piano per le HG , GK è quello, che passa per le DE , EF , onde la BG è perpendicolare al piano, che passa per le DE , EF , e si è dimostrata eziandìa

dio la BG perpendicolare al piano per le AB, BC, ed è perpendicolare al piano per le DE, EF, adunque la BG è perpendicolare ad amendue i piani, che passano per le AB, BC, DE, EF, ma que' piani sono paralleli fra loro, a' quali la medesima linea retta è perpendicolare, è dunque il piano per le AB, BC parallelo al piano per le DE, EF, e perciò, se due linee rette, che si toccano, siano parallele a due altre linee, che si toccano, ma non nel medesimo piano, ancora i piani, che passano per le dette linee, saranno paralleli fra loro, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XVI.

Se due piani paralleli sono segati da qualche piano, i comuni segamenti loro saranno paralleli.

Due piani paralleli A B, CD siano segati da qualche piano EFGH ed i loro comuni segamenti siano EF, GH.



Dico

Dico la EF essere parallela alla GH , perciocchè, se non è parallela, prolungate le EF , GH si congiungeranno insieme, o verso le parti F , H , o verso le parti E , G , prolunghinsi prima verso le F , H : e congiungansi nel punto K , perchè dunque la EFK è nel piano AB , tutti i punti, che si pigliano nella EFK , saranno nel medesimo piano, ma il punto K è uno di quelli, adunque K è nel piano AB , e per la medesima ragione K è nel

piano CD , adunque i piani AB , CD prolungati si congiungeranno insieme, ma non si congiungono, conciossiacchè sian posti paralleli, adunque le linee rette EF , GH prolungate non si congiungeranno verso le parti F , H ; similmente dimostreremo, se si prolunghino non congiungersi verso le parti E , G , e quelle, che da niuna parte si congiungono sono parallele, oade la EF è parallela alla GH , se dunque due piani paralleli siano segati da qualche piano, i comuni segmenti loro saranno paralleli, lo che bisognava dimostrare.

TEO.



PROPOSIZIONE XVII.

Se due linee rette si seghino da' piani paralleli, faranno segate nelle medesime proporzioni.

Due linee rette AB , CD siano segate da' piani paralleli GH , KL , MN ne' punti A , E , B , C , F , D . Dico come la linea retta AE alla retta EB , così essere la CF alla FD . Giungansi AC , BD , AD , e la AD tocchi il piano KL nel punto X ; e giugansi EX , XF , perchè dunque due piani paralleli KL , MN sono segati dal piano $EBDX$, i comuni segamenti EX , BD sono paralleli; per la medesima ragione, perchè due piani paralleli GH , KL sono segati dal piano $AECF$, i comuni segamenti loro AC , EX sono paralleli, e perchè ad un lato del triangolo ABD , cioè a BD , si è tirata la EX parallela, come è la AE alla EB , così farà la AX alla XD , similmente perchè ad



*Per
ant.*

un

un lato del triangolo ADC , cioè ad AC , si è tirata la XF parallela, sarà come la AX alla XD , così la CF alla FD , e si è dimostrato come la AX alla XD , così essere la AE alla EB , come dunque la AE alla EB , così è la CF alla FD , onde le due linee rette si seghino da' piani paralleli, faranno segate nelle medesime proporzioni, lo che bisognava dimostrare.



T E O R E M A XVI.
PROPOSIZIONE XVIII.

Se una linea retta sia perpendicolare a qualche piano, tutti i piani, che passano per la detta linea, faranno ad angoli retti sopra il medesimo piano.

Sia la linea retta AB perpendicolare al soggetto piano. Dico ancora tutti i piani, che passano per la AB essere ad angoli retti sopra il soggetto piano. Prolunghisi per la AB il piano

piano DE, e sia del piano DE, e del soggetto piano il comun segamento CE, e piglisi nella CE qualsivoglia punto F, dal quale nel piano DE tirisi la FG perpendicolare alla CE, perchè dunque

la AB è perpendicolare al soggetto piano, sarà ancor perpendicolare a tutte le linee rette, che la



toccano, e sono nel medesimo piano, e perciò è altresì perpendicolare alla CE, onde l'angolo ABF è retto,

3. def.

ma eziandio GFB è retto, adunque la AB è parallela alla FG; ed è la

8. di

la AB perpendicolare al soggetto piano, *ques.*

4. def.

la FG adunque sarà perpendicolare al medesimo piano, ma il piano al piano è retto, quando in un piano tirate le linee rette perpendicolari sopra il comun segamento de' piani, siano all' altro piano perpendicolari: ed al comun segamento de' piani CE tirata in un piano DE la FG perpendicolare si è dimostrata perpendicolare al soggetto piano, adunque il piano DE è retto al soggetto piano, similmente si dimostreranno tutti i piani, che passano per la AB essere retti

retti al detto piano, laonde se una linea retta sia perpendicolare a qualche piano, tutti i piani, che passano per la detta linea, faranno ad angoli retti sopra il medesimo piano, lo che bisognava dimostrare.



T E O R E M A XVII.
PROPOSIZIONE XIX.

Se due piani, che si segano, siano ad angoli retti sopra qualche piano, eziandio il comun segamento loro farà perpendicolare al medesimo piano.

Siano due piani, che si seghino AB , BC ad angoli retti sopra il soggetto piano, ed il comun segamento loro sia BD . Dico la BD essere perpendicolare al soggetto piano. Non già, ma s'egli è possibile, non sia la BD perpendicolare al soggetto piano, e dal punto D tirisi nel piano AB la linea retta DE , perpendicolare
lare

lare alla AD , e nel piano BC tirisi la DF perpendicolare alla CD , e perchè il piano AB è retto al soggetto piano, ad al comune segamento loro AD è tirata ad angoli retti la D



E nel piano AB , sarà la DE perpendicolare al soggetto piano, similmente dimostreremo la DF essere perpendicolare al soggetto piano, onde dal medesimo punto D sono costituite due linee rette perpendicolari al soggetto piano dalla medesima parte, ^{13. di} lo che è impossibile, adunque dal pun- ^{ques.} to D non si costituiranno altre linee rette perpendicolari al soggetto piano, fuori, che la DB segamento comune de' piani AB , BC ; adunque, se due piani, che si segano, siano ad angoli retti sopra qualche piano, eziandio il comun segamento loro sarà perpendicolare al medesimo piano.

T E O R E M A XVIII.

PROPOSIZIONE XX.

Se un angolo solido sia contenuto da tre angoli piani, due di loro
M sono

sono maggiori del rimanente presi in qualsivoglia modo.

L'angolo solido A sia contenuto da tre angoli piani BAC, CAD, DAB. Dico degli angoli BAC, CAD, DAB due essere maggiori del rimanente presi in qualunque modo. Perciocchè, se gli angoli BAC, CAD, DAB siano fra loro uguali, è manifesto due essere maggiori del rimanente, presi in qualunque modo, ma se non siano uguali, sia BAC maggiore, e nella linea retta AB, e nel punto in essa A costituisca nel piano, che passa per le BA, AC, l'angolo BAE uguale all'angolo DAB, e pongasi la AE uguale alla AD, e per E tirata la BEC seghi le linee rette AB, AC ne' punti, B, C, e giungansi BD, DC, e perchè la DA è uguale alla AE, e la AB è comune, le due DA, AB sono uguali alle due BA, AE, e l'angolo DAB è uguale all'angolo BAE: adunque la base DB è uguale alla base BE, e perchè le due BD, DC sono maggiori della BC, delle quali la DB si è dimostrata



LIBRO XI. 167

Arata uguale alla BE , farà la rimanente DC maggiore, che la rimanente EC , ed essendo la DA uguale alla AE , e la AC comune, e la base DC maggiore della base EC , farà l'angolo DAC maggiore dell'angolo EAC , e si è dimostrato l'angolo DAB uguale all'angolo BAE , onde gli angoli DAB , DAC sono maggiori dell'angolo BAC , similmente dimostreremo, se si piglino due altri angoli, quali si sianò, quelli essere maggiori del rimanente, se dunque un angolo solido sia contenuto da tre angoli piani, due di loro sono maggiori del rimanente, presi in qualsivoglia modo, lo che bisognava dimostrare.

8. del
prim.

T E O R E M A XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

Ogni angolo solido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti.

Sia l'angolo solido A contenuto da angoli piani BAC , CAD , DAB .
 M_2 Dico

Dico gli angoli BAC , CAD , DAB essere minori di quattro retti. Pigliansi in ciascuna di esse AB , AC , AD quali punti si vogliano B , C , D , e giungansi



BC , CD , DB , perchè dunque l'angolo solido B è contenuto da tre angoli CBA , ABD , CBD , due quali si vogliano sono maggiori del rimanente, adunque gli angoli CBA , ABD sono maggiori dell'angolo BCD , e per la medesima ragione gli angoli BCA , ACD sono maggiori dell'angolo BCD , e gli angoli CDA , ADB maggiori dell'angolo BCD ; onde sei angoli CBA , ABD , BCA , ACD , ADC , ADB sono maggiori di tre angoli CBD , BCD , CDB , ma tre angoli CBD , BDC , DCB sono uguali a due retti, adunque sei angoli CBA , ABD , BCA , ACD , CDA , ADB sono maggiori di due retti, ed essendo tre angoli di ciascun triangolo ABC , ACB , CAB uguali a due retti, faranno di tre triangoli nove angoli CBA , ACB , BAC , ACD , DAC , CDA , ADB , DBA , BAD uguali a sei retti, de' quali sei angoli ABC , BCA ,

BCA , ACD , CDA , ADB , DBA sono maggiori di due retti, adunque i tre angoli rimanenti BAC , CAD , DAB , che contengono un angolo solido, faranno minori di quattro retti, laonde ogni angolo solido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti, lo che bisognava dimostrare.

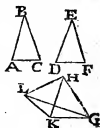
T E O R E M A XX.

PROPOSIZIONE XXII.

Se siano tre angoli piani, de' quali due siano maggiori del rimanente, presi in qualsivoglia modo, e siano contenuti da linee rette uguali, è possibile, che da quelle linee, che congiungono le dette linee rette, sia costituito un triangolo.

Siano tre angoli piani ABC , DEF , GHK , due de' quali siano maggiori del rimanente presi in qualunque modo, cioè gli angoli ABC , DEF siano maggiori del rimanente angolo GHK , e gli angoli DEF , GHK maggiori dell'angolo ABC , ed
oltre

oltre a ciò gli angoli $G H K$, $A B C$ maggiori dell'angolo $D E F$, e siano uguali le linee rette $A B$, $B C$, $D E$, $E F$, $G H$, $H K$, e giungansi $A C$, $D F$, $G K$. Dico esser possibile, che da linee rette uguali alle $A C$, $D F$, $G K$, si costituisca un triangolo, cioè



due quali si vogliano delle $A C$, $D F$, $G K$ essere maggiori della rimanente presa in qualunque modo. Se dunque gli angoli $A B C$, $D E F$, $G H K$ siano fra loro uguali, è manifesto, che facendosi uguali $A C$, $D F$, $G K$ da linee uguali ad esse, si può costituire un triangolo, ma se no, siano disuguali, e nella linea retta, $H K$ e nel punto in essa H costituisca l'angolo $K H L$ uguale all'angolo $A B C$; e pongansi ad una di esse $A B$, $B C$, $D E$, $E F$, $G H$, $H K$ uguale $H L$, e giungansi $G L$, $K L$, onde, perchè le due $A B$, $B C$ sono uguali alle due $K H$, $H L$, e l'angolo B è uguale all'angolo H , sarà la base $A C$ uguale alla base $K L$: e perchè gli angoli $A B C$, $G H K$ sono maggiori dell'angolo $D E F$, e l'angolo $A B C$ è ugua-

23. del
prim.

4. del
prim.

è uguale all'angolo KHL, sarà GHL maggiore dell'angolo DEF, ed essendo le due GH, HL uguali alle due DE, EF, e l'angolo GHL maggiore dell'angolo E, sarà la base GL maggiore della base DF, ma le GK, KL sono maggiori della GL, ^{24. del prim.} adunque molto maggiori sono GK, KL della DF, e la KL è uguale ^{20. del prim.} alla AC, onde la AC, GK sono maggiori della rimanente DF, nel medesimo modo dimostreremo le AC, DF essere maggiori della GK, e le GK, DF maggiori della AC, è dunque possibile, che da linee rette uguali alle AC, DF, GK si costituisca un triangolo, lo che ec.

PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE XXIII.

Costituire un angolo solido di tre angoli piani, de' quali due siano maggiori del rimanente, presi in qualsivoglia modo; ma bisogna, che i tre angoli siano minori di quattro retti.

Siano i tre angoli dati ABC, D
M 4 EF,

EF, GHK, due de' quali presi in qualsivoglia modo siano maggiori del rimanente, e siano i tre angoli minori di quattro retti, bisogna da angoli uguali agli ABC, DEF, GHK costituire un angolo solido. Taglinsi le AB, BC, DE, EF, GH, HK uguali, e giungansi AC, DF, GK, è possibile dunque, che da linee uguali ad esse AC, DF, GK si costituisca un triangolo, onde costitui-

Per
l' ant.
22. del
prim.

scasi LMN, talmente, che la AC sia u-

guale alla LM, e la DF alla MN, ed oltre a questo la GK alla LN, e descrivasi dintorno al triangolo LMN il cer-



5. del
quarto.

chio LMN, e piglisi il centro di esso, il quale sarà o dentro al triangolo LMN, o in un lato di esso, o di fuori; sia dentro, e sia X, e giungasi LX, MX, NX.

Dico la AB essere maggiore della LX, se non

è così, la AB o sarà

uguale alla LX, o minore, sia prima

uguale, perchè dunque la AB, è

uguale alla LX, ed è uguale alla B

C,



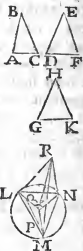
C,

C, farà la LX alla BC uguale, ma la LX è uguale alla XM; adunque le due AB, BC sono uguali alle due LX, XM, l'una all'altra, e la base AC si pone uguale alla base LM, onde l'angolo ABC è uguale all'angolo LXM, e per la medesima ragione l'angolo DEF è uguale all'angolo MXN, e l'angolo GHK all'angolo NXL, tre angoli dunque A BC, DEF, GHK sono uguali a 8. del
tre angoli LXM, MXN, NXL, *prim.*
ma i tre LXM, MXN, NXL sono uguali a quattro retti, adunque anco i tre ABC, DEF, GHK saranno uguali a quattro retti, e si pon- 13. del
gono minori di quattro retti: lo che *prim.*
è inconveniente, non è dunque la AB uguale alla LX. Dico eziandio la AB non essere minore della LX, perciocchè, s'egli è possibile, sia minore: e pongasi la XO uguale alla AB, e alla BC uguale la XP, e giungasi OP, perchè dunque la AB è uguale alla BC, eziandio la XO sarà uguale alla XP, adunque ancor la rimanente OL è uguale alla rimanente PM, e però la LM è parallela alla OP, ed il triangolo LMX equiangolo al triangolo OPX, è dunque
M 5 come

come la XL alla LM , così la XO alla OP : e permutandole come la LX alla XO , così la LM alla OP : e la LX è maggiore della XO , adunque la LM è maggiore della OP , ma la LM si è posta uguale alla AC , onde ancor la AC sarà maggiore della OP , e perchè due linee rette

25. del prim. AB, BC sono uguali alle due OX, XP , e la base AC è maggiore della base OP ; sarà l'angolo ABC maggiore dell'angolo OMP ; similmente dimostreremo l'angolo DEF essere maggiore dell'angolo MKN , e l'angolo GHL dell'angolo NXL , tre angoli dunque ABC, DEF, GHL sono maggiori de' tre LXM, MXN, NXL , ma gli angoli ABC, DEF, GHL si pongono minori di quattro retti, adunque gli angoli LXM, MXN, NXL saranno molto minori di quattro retti, ma sono uguali, che è inconveniente, non è dunque la AB minore della LX : e si è dimostrato non essere uguale, è dunque

Coroll. *15. del prim.* *15. di quesf.*



dunque necessario, che sia maggiore, costituiscafi dal punto X la XR perpendicolare al piano del cerchio LMN; e pongasi il quadrato di RX uguale all' eccello, nel quale il quadrato di AB avanza il quadrato di LX, e giungansi RL, RM, RN, perchè dunque la RX è perpendicolare al piano del cerchio LMN, sarà ancora perpendicolare a ciascuna di esse LX, MX, NX, e perchè la LX è uguale alla XM, ed è comune, e ad angoli retti la XR, sarà la base LR uguale alla base RM, e per la medesima ragione la RN uguale ad amendue RL, RM, adunque le tre linee rette RL, RM, RN sono fra loro uguali, e perchè il quadrato di XR si pone uguale all' eccello, nel quale il quadrato di AB avanza il quadrato di LX, sarà il quadrato di AB uguale a' quadrati delle LX, XR, ed il quadrato di RL è uguale a' quadrati delle LX, XR, perciocchè l'angolo LXR è retto, adunque il quadrato di AB sarà uguale al quadrato di RL, e però la AB è uguale alla RL, ma alla AB è uguale ciascuna di esse BC, DE, EF, GH, HK: ed alla RL sono amendue

M 6 RM,

3. def.

4. del

27. del
prim.

RM , RN uguali, ciascuna dunque di esse AB , BC , DE , EF , GH , HK , è uguale a ciascuna delle RL ,

8. *del prim.* RM , RN : ed essendo le due LR , RM uguali alle due AB , BC , e ponendosi la base LM uguale alla base AC , farà l'angolo LRM uguale all'angolo ABC : e per la medesima ragione l'angolo MRN all'angolo DEF , e l'angolo LRN uguale all'angolo GHK , adunque da tre angoli piani LRM , MRN , LRN , che sono uguali a tre dati ABC , DEF , GHK si è costituito l'angolo solido R , che si contiene dagli angoli LRM , MRN , LRN . Il medesimo si dimostrerebbe, quando il centro del cerchio o cadesse fuori, o in un lato di esso triangolo. Dunque si farà costituito un angolo solido di tre angoli piani, due de' quali siano maggiori del rimanente presi in qualunque modo, che è quello, che bisognava fare.

L E M M A.

In che modo si pigli il quadrato della RX uguale a quello, nel quale il quadrato della AB avanza il qua-

quadrato della LX, dimostreremo così.

Propongasi le linee rette AB, LX, e sia AB la maggiore, e descrivasi in essa il mezzo cerchio ACB, nel quale si adatti la linea retta AC uguale alla LX, e giungansi CB: perchè dunque nel mezzo cerchio ABC è l'angolo ACB, sarà l'angolo ACB retto, onde il quadrato della AB è uguale al quadrato della AC, ed a quello della CB, per la qual cosa il quadrato della AB avanza il quadrato della AC quanto è il quadrato della CB: e la AC è uguale alla LX, adunque il quadrato della AB avanza il quadrato della LX quanto è il quadrato della CB: e però, se piglieremo alla CB uguale la XR, il quadrato della AB avanzerà il quadrato della LX, quanto è il quadrato, che si fa dalla RX.

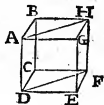


T E O R E M A XXI.
PROPOSIZIONE XXIV.

Se un solido sia contenuto da piani

ni paralleli, i piani di esso opposti saranno e uguali, e parallelogrammi.

Il solido $CDGH$ sia contenuto da' piani paralleli AC , GF , AH , DF , FB , AE . Dico i piani di esso opposti essere uguali, e parallelogrammi.



16. di *ques.* Perciocchè essendo due piani paralleli BG , CE segati dal piano AC , i comuni segmenti loro sono paralleli, adunque la AB è parallela alla CD , similmente perchè due piani paralleli BF , AE sono segati dal piano AC i comuni loro segmenti sono paralleli, e però la AD è parallela alla BC , e si è dimostrata la AB parallela alla CD , onde AC sarà parallelogrammo, similmente dimostreremo ciascuno di essi DF , FG , GB , BF , AE essere parallelogrammo; giungansi AH , DF , e perchè la AB è parallela alla DC , e la BH alla CF , saranno le due AB , BH , che si toccano, parallele alle due, che si toccano DC , CF , e non sono nel medesimo piano, onde contreranno uguali angoli, l'angolo dunque ABH è
10. di *ques.*

H è uguale all' angolo DCF, e perchè le due AB, BH sono uguali alle due DC, CF, e l' angolo ABH è uguale all' angolo DCF, farà la base AH uguale alla base DF, ed il triangolo ABH uguale al triangolo DCF, ed essendo il parallelogrammo BG doppio del triangolo ABH, ed il parallelogrammo CE doppio del triangolo DCF, farà il parallelogrammo BG uguale al parallelogrammo CE, non altrimenti dimostreremo il parallelogrammo AC essere uguale al parallelogrammo GF, ed il parallelogrammo AE al parallelogrammo BF, se dunque un solido sia contenuto da piani paralleli, i piani di esso opposti saranno uguali, e parallelogrammi, lo che bisognava dimostrare.

34. del prim.

4. del prim.

41. del prim.

TEOREMA XXII.
PROPOSIZIONE XXV.

Se un solido parallelepipedo, cioè contenuto da piani paralleli, sia se-
gato da un piano parallelo a' piani
opposti, sarà come la base alla ba-
se, così il solido al solido.

Il solido parallelepipedo ABDC sia
se-
gato

seguato dal piano YE parallelo a' piani opposti RA , DH . Dico come la base AEF o alla base $EHCF$, così



essere il solido $ABFY$ al solido $EGDC$. Prolunghisi la AH dall' una, e dall' altra parte, e pongansi alla EH quante si vogliano uguali HM , MN , e alla AE quante si vogliano uguali AK , KL , e compiscansi i parallelogrammi LO , $K\phi$, HX , MS , ed i solidi LP , KR , DM , MT , perchè dunque le linee rette LK , KA , AE sono fra loro uguali, saranno ancora i parallelogrammi LO , $K\phi$, AF fra loro uguali, e parimente uguali fra loro i parallelogrammi $K\pi$, KB , AG , ed altresì i parallelogrammi LY , KP , AR , perciocchè sono opposti; per la medesima ragione i parallelogrammi EC , HX , MS sono fra loro uguali, e parimente i parallelogrammi HG , HI , IN uguali fra loro; e così i parallelogrammi DH , $M\Omega$,

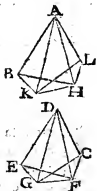
MQ , NT ; adunque tre piani de' solidi LP , KR , AY sono uguali a tre piani; ma tre piani a tre opposti sono uguali, adunque tre solidi LP , KR , AY saranno fra loro uguali, e per la medesima ragione eziandio tre solidi LD , DM , MT sono uguali fra loro, quante volte dunque la base LF è multiplice della base AF , tante volte il solido LY è multiplice del solido AY : e per la medesima ragione quante volte la base NF è multiplice della base HF , tante volte il solido NY è multiplice del solido HY , e se la base LF è uguale alla base NF , ancor il solido LY sarà uguale al solido NY , e se la base LF avanza la base NF , eziandio il solido LY avvanzerà il solido NY : e se è minore, sarà minore; essendo dunque quattro grandezze, cioè due basi AF , FH , e due solidi AY , HY , si sono presi gli ugualmente multiplici della base AF , e del solido AY , cioè la base LF , ed il solido LY , e della base HF , e del solido HY , cioè la base NF , ed il solido NY , e si è dimostrato, che se la base LF avanza la base NF , il solido LY avvanzerà il solido NY , e se è uguale

uguale, farà uguale, e se minore, minore, è dunque come la base AF alla base FH , così il solido AY al solido YH , onde se il solido parallelepipedo sia segato da un piano parallelo a' piani opposti, farà come la base alla base, così il solido al solido, lo che bisognava dimostrare.

P R O B L E M A IV.
PROPOSIZIONE XXVI.

Nella data retta linea, e nel punto dato in essa costituire un angolo solido uguale ad un altro dato.

Sia la data linea retta AB , il punto in essa dato A , e l'angolo solido D , che sia contenuto da angoli piani EDC, EDF, FDC , bisogna nella data linea retta AB , e nel punto dato in essa A costituire un angolo solido uguale al dato angolo solido D . Piglisi nella linea D F qualsivoglia punto F , dal quale si
 tiri



tiri la FG perpendicolare al piano, che passa per le ED , DC , e tocchi il piano nel punto G , e giungansi DG , e nella linea retta AB , e nel punto in essa A , costituiscafi l'angolo BAL uguale all'angolo EDC , ed all'angolo EDG costituiscafi uguale l'angolo BAK , oltre a ciò pongasi la AK uguale alla DG , e dal punto K dirizzisi la KH perpendicolare al piano per BAL , e pongasi la KH uguale alla GF , e giungasi HA . Dico l'angolo solido A , che è contenuto dagli angoli BAL , BAH , HAL , essere uguale all'angolo solido D , contenuto dagli angoli EDC , EDF , FDC . Piglinsi linee rette uguali AB , DE , e giungansi HB , KB , FE , GE , perchè dunque la FG è perpendicolare al soggetto piano, ed a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel soggetto piano, sarà perpendicolare, onde l'uno, e l'altro angolo FGD , FGE è retto, e per la medesima ragione l'uno, e l'altro HKA , HKB è retto, e perchè le due KA , KB sono uguali alle due GD , DE l'una all'altra, e contengono angoli uguali, sarà la base BK uguale alla base EG , e la KH

11. di ques.

23. del prim.

12. di ques.

3. def.

4. del prim.

KH è uguale alla GF , e contengono angoli retti, è dunque ancor la HB uguale alla FE , similmente, perchè le due AK , KH sono uguali alle due DG , GF , e contengono angoli retti, sarà la base AH uguale alla base DF , ed è la AB uguale

4. *del prim.* alla DE , adunque le due HA , A

B sono uguali alle due FD , DE , e la base HB è uguale alla base EF ; onde l'angolo B AH sarà uguale all'angolo EDF , per la medesima ragione l'angolo HAL è uguale all'



8. *del prim.* angolo FDC , perciocchè, se pigliamo le A L , DC uguali, e giun-

ghiamo KL , HL , GC , FC , essendo tutto BAL uguale a tutto EDC , de' quali BAK si pone uguale ad EDG , sarà il rimanente KAL uguale al rimanente GDC , e perchè le due KA , AL sono uguali alle due GD , DC , e contengono angoli uguali, sarà la base KL uguale alla base GC , e la KH è uguale alla GF , adunque le due LK , KH sono uguali alle due CG , GF , e contengono



4. *del prim.*

gono angoli retti ; onde la base HL è uguale alla base FC , oltre a ciò, perchè le due HA , AL sono uguali alle due FD , DC , e la base HL è uguale alla base FC , sarà l'angolo HAL uguale all'angolo FDC , ed è l'angolo BAL uguale all'angolo EDC , adunque nella data retta linea, e nel punto dato in essa si è costituito un angolo solido uguale ad un altro dato, lo che bisognava fare.

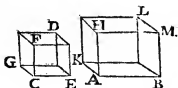
P R O B L E M A V.

PROPOSIZIONE XXVII.

Dalla linea retta data descrivere un solido parallelepipedo simile, e similmente posto ad un altro dato.

Sia la linea retta AB , il dato solido parallelepipedo CD , bisogna dalla retta linea AB descrivere un solido parallelepipedo simile, e similmente posto al dato solido parallelepipedo CD . Costituiscasi nella linea retta AB , e nel punto dato in essa A , un angolo uguale all'angolo solido C , quale sia contenuto dagli angoli BAH , HAK , KAB di modo, che l'
an-

angolo BAH sia uguale all'angolo ECF, e l'angolo BAK all'angolo ECG, ed ancor l'angolo KAH uguale all'angolo GCF, e facciasi co-



12. del
sesto.

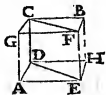
me la EC alla CG, così la BA alla AK, e come la GC alla CF, così la KA alla AH, adunque per l'uguaglianza in proporzione ordinata come la EC alla CF, così sarà la BA alla AH, compiscasi il parallelogrammo BH, ed il solido AL, perchè dunque è come la EC alla CG, così la BA alla AK, e dintorno gli uguali angoli ECG, BAK i lati sono proporzionali; farà il parallelogrammo KB simile al parallelogrammo GE: per la medesima ragione il parallelogrammo KH simile al parallelogrammo GF, ed il parallelogrammo HB al parallelogrammo FE, sono dunque tre parallelogrammi del solido AL simili a tre parallelogrammi del solido CD, ma i tre sono uguali, e simili a tre opposti, e però tutto il solido.

solido AL sarà simile a tutto il solido CD, adunque dalla linea retta AB si è descritto un solido parallelepipedo simili, e similmente posto al dato solido parallelepipedo, lo che bisognava fare.

TEOREMA XXIII.
PROPOSIZIONE XXVIII.

Se un solido parallelepipedo sia segato da un piano, che passi per i diametri de' piani opposti, sarà segato per mezzo.

Il solido parallelepipedo AB sia segato dal piano CD, EF per i diametri de' piani opposti, cioè CF, DE. Dico il solido AB esser segato per mezzo dal piano CDEF. Perchè il triangolo CGF è uguale al triangolo CBF, ed il triangolo ADE al triangolo DEH, ed il parallelogrammo CA uguale al parallelogrammo BE, che gli è opposto, ed il parallelogrammo GE uguale al parallelogrammo CH, sarà il



pri.

prisma contenuto da due triangoli CGF , ADE e da' tre parallelogrammi GE , AC , CE uguale al prisma, che contenuto da' due triangoli CFB , DEH , e da' tre parallelogrammi CH , BE , CE , conciossiachè sian contenuti da piani e di numero, e di grandezza uguali, adunque tutto il solido AB è segato per mezzo dal piano $CDEF$, lo che bisognava dimostrare.

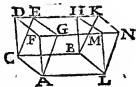
T E O R E M A XXIV.

PROPOSIZIONE XXIX.

I solidi parallelepipedì, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, de' quali i dritti siano nell' istesse linee rette, fra loro sono uguali.

Siano nella medesima base AB i solidi parallelepipedì CM , C N della medesima altezza, de' quali

i dritti AF , AG , LM , LN , C
 D ,



D, CE, BH, BK siano nelle istesse linee rette FN, DK. Dico il solido CM essere uguale al solido CN, perciocchè essendo amendue CH, CK parallelogrammi, sarà la CB uguale all'una, e l'altra di esse DH, EK, onde ancor la DH è uguale alla EK, traggasi la comune EH; la rimanente dunque DE è uguale alla rimanente HK, e perciò eziandio il triangolo DEC è uguale al triangolo HKB, ed il parallelogrammo DG uguale al parallelogrammo HN, e per la medesima ragione il triangolo AFG è uguale al triangolo LMN, ed è il parallelogrammo CF uguale al parallelogrammo BM, ed il parallelogrammo CG al parallelogrammo BN, essendo opposti, adunque ancor il prisma contenuto da' due triangoli AFG, DEC, e da' tre parallelogrammi AD, DG, GC è uguale al prisma contenuto da' due triangoli LMN, BHK, e da' tre parallelogrammi BM, NH, BN, pongasi il solido comune, la cui base è il parallelogrammo AB, ed opposto ad esso G EHM, tutto dunque il solido parallelepipedo CM è uguale a tutto il solido parallelepipedo CN, laonde i

N soli.

34. del
prim.
1. del
sesto.

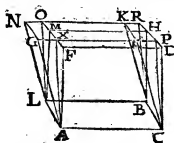
solidi parallelepipedi , che hanno la medesima base , e la medesima altezza , de' quali i dritti siano nelle stesse linee rette , fra loro sono uguali , lo che bisognava dimostrare .

T E O R E M A XXV.

PROPOSIZIONE XXX.

I solidi parallelepipedi , che hanno la medesima base , e la medesima altezza , de' quali i dritti non siano nelle stesse linee rette , sono fra loro uguali .

Siano nella medesima base AB i solidi parallelepipedi CM , CN , e del-



la medesima altezza , de' quali i dritti AF , AG , LM , LN , CD , C
 E ,

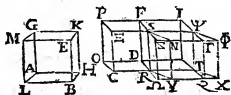
E, BH, BK non siano nelle stesse linee rette. Dico il solido CM essere uguale al solido CN. Prolunghinsi NK, DH, e GE, FM, e concorrano fra loro ne' punti R, X, ed ancora prolunghinsi FM, GE a' punti O, P, e giungansi AX, LO, CP, BR; il solido CM, la cui base è il parallelogrammo ACBL, ed opposto ad esso FDHM, è uguale al solido CO, la cui base è il parallelogrammo ACBL, ed opposto ad esso XPRO, perciocchè sono nella medesima base ACBL, ed i lor dritti AF, AX, LM, LO, CD, CP, BH, BR sono nelle medesime linee rette FO, DR, ma il solido CO, la cui base è il parallelogrammo ACBL, ed opposto ad esso XPRO è uguale al solido CN, la cui base è il parallelogrammo ACBL, ed opposto ad esso GEKN, conciossiacosa-
chè siano nella medesima base ACBL, ed i dritti loro AG, AX, CE, CP, LN, LO, BK, BR siano nelle medesime linee rette GP, NR, onde ancora il solido CM sarà uguale al solido CN, adunque i solidi parallelepipedì, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, de-

quali i dritti non siano nelle stesse linee rette, fra loro sono uguali, lo che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXVI
PROPOSIZIONE XXXI.

I solidi parallelepipedi, che hanno uguali basi, e la medesima altezza, fra loro sono uguali.

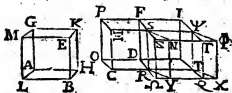
Siano nelle uguali basi AB , CD i solidi parallelepipedi AE , CF , della medesima altezza. Dico il solido AE essere uguale al solido CF . Siano prima i dritti loro AK , BE , AG , LM , OP , DF , CZ , RS per-



pendicolari alle basi AB , CD , e l'angolo ALB sia disuguale all'angolo CRD , e prolunghisi la RT per diritto alla CR , e costituiscafi nella linea retta RT , e nel punto in essa R , l'angolo TRY uguale all'angolo A

lo ALB , e pongasi la RT uguale alla AL , ed alla LB uguale la RY , e per Y tirisi la XY parallela alla RT , e compiscasi la base RX , ed il solido ΨY , perchè dunque le due T , R , RY sono uguali alle due AL , LB , e contengono gli angoli uguali, sarà il parallelogrammo RX uguale, e simile al parallelogrammo HL , e perchè altresì la AL è uguale alla RT , e la LM alla RS , e contengono gli angoli uguali, il parallelogrammo $R\Psi$ sarà uguale, e simile al parallelogrammo AM ; per la medesima ragione il parallelogrammo LE è uguale, e simile al parallelogrammo SY , adunque tre parallelogrammi del solido AE sono uguali, e simili a tre *24. di* parallelogrammi del solido ΨY , ma *ques.* ancora i tre opposti a tre sono uguali, e simili, tutto dunque il solido parallelepipedo AE è uguale a tutto il solido parallelepipedo ΨY prolunginsi DR , XY , e concorrano fra loro nel punto Ω , e per T tirisi la TQ parallela alla $D\Omega$, e prolunginsi TQ , OD , e concorrano in V , e *29. di* compiscansi i solidi $\Omega\Psi$, RI ; adun- *ques.* que il solido $\Theta\Psi$, la cui base è il parallelogrammo $R\Psi$, ed opposto ad es-
so

so ΩT , è uguale al solido ΨY , la cui base è il parallelogrammo $R\Psi$, ed opposto ad esso $Y\Phi$, perciocchè sono nella medesima base $R\Psi$, e nella medesima altezza, ed i dritti loro $R\Omega$, RY , TQ , TX , SZ , SN , ΨF , $\Psi\Phi$ sono nelle medesime linee rette ΩX , $Z\Phi$, ma il solido ΨY è uguale al solido $A E$, adunque ancor $\Psi\Omega$ è uguale al solido $A E$: oltre a ciò, perchè il parallelogrammo $R Y X T$ è uguale al parallelogrammo ΩT ,



essendo nella medesima base $R T$, e nelle medesime perallele $R T \Omega X$, ma il parallelogrammo $R Y X T$ è uguale al parallelogrammo $C D$, perchè ancor esso è uguale ad $A B$, ed il parallelogrammo ΩT è uguale al parallelogrammo $C D$, ed è un altro parallelogrammo $D T$; sarà come la base $C D$ alla base $D T$, così ΩT a $D T$, e perchè il solido parallelepipedo $\Psi\Omega$ è legato dal piano $R F$ parallelo a' piani opposti, sarà come la base C D al.

Dalla base DT , così il solido CF al solido RI ; e per la medesima ragione, perchè il solido parallelepipedo ΩI è segato dal piano $R\psi$ parallelo a' piani opposti, come la base ΩT alla base TD , così sarà il solido $\Omega\psi$ al solido RI , ma come la base CD alla base DT , così la base ΩT alla base TD , come dunque il solido CF al solido RI , così il solido $\Omega\psi$ al solido RI , ed avendo ambedue i solidi CF , $\Omega\psi$ al solido RI la medesima proporzione, sarà il solido CF uguale al solido $\Omega\psi$, ed il solido $\Omega\psi$ si è dimostrato uguale al solido AE , adunque eziandio il solido AE sarà uguale al solido CF .

9. del
prim.



Ma non siano i dritti AG , HK , BE , LM , CN , RS , DE , OP perpendicolari alle basi AB , CD . Dico similmente il solido AE essere uguale al solido CF . Tirinsi da' punti K , E , G , M , P , F , N , S , al soggetto piano le $K\Xi$, ET , GY ,
N 4 M 4

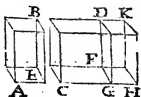
$M\Phi$, PX , $F\Psi$, $N\Omega$, SI , e tocchino il piano ne' punti Ξ , T , Y , Φ , X , Ω , Ψ , I e giungansi ΞT , $Y\Phi$, ΞY , $T\Phi$, $X\Psi$, $X\Omega$, ΩI , ΨI , adunque il solido $K\Phi$ è uguale al solido PI , perciocchè sono nelle uguali basi KM , PS , e della medesima altezza, de' quali i dritti sono perpendicolari alle basi, ma il solido $K\Phi$ è uguale al solido AE , ed il solido PI uguale al solido CF , conciosiafiacchè siano nella medesima base, e della medesima altezza, de' quali i dritti non sono nelle stesse linee rette; adunque eziandio il solido AE sarà uguale al solido CF , laonde i solidi parallelepipedi, che hanno uguali basi, e la medesima altezza, fra loro sono uguali, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XXVII,
PROPOSIZIONE XXXII.

I solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza, fra loro sono come le basi.

Siano i solidi parallelepipedi AB ,
 CD ,

CD, che abbiano la medesima altezza. Dico essere fra loro come le basi, cioè come la base AE alla base CF, così il solido AB al solido CD. Adattarsi al a linea retta FG il paral-



lelogrammo FH uguale al parallelogrammo AE, e dalla base FH, e colla medesima altezza del solido CD, compiscasi il solido parallelepipedo GK,

*Per
ant.*

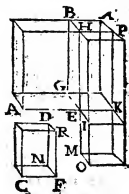
adunque il solido AB è uguale al solido GK, perciocchè sono nelle uguali basi AE, FH, e della medesima altezza, onde perchè il solido parallelepipedo CK è legato dal piano DG parallelo agli opposti piani, sarà come la base HF alla base, FC, così il solido HD al solido DC, ed è la base FH uguale alla base AE, ed il solido GK uguale al solido AB, adunque è come la base AE alla base CF, così il solido AB al solido CD, onde i solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza, fra loro sono come le basi, lo che bisognava dimostrare.

*25. di
ques.*

T E O R E M A XXVIII.
PROPOSIZIONE XXXIII.

I solidi parallelepipedi simili sono in proporzione tripla di quella, che hanno i lati omologhi.

Siano i solidi parallelepipedi simili AB , CD , ed il lato AE sia omologo al lato CF . Dico il solido AB al solido CD avere tripla proporzione di quella, che ha la AE alla CF . Prolunghisi EK , EI , EM per diritto alle AE , GE , HE , e pongasi la EK uguale alla CF , ed alla

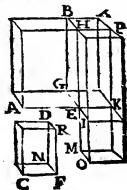


FN la uguale EI , ed ancora alla FR uguale la EM , e compitassi il parallelogrammo KI , ed il solido K
O,

O, perchè dunque le due KE , El sono uguali alle due CF , FN , e l'angolo KEl è uguale all'angolo CFN ; essendo ancor l'angolo AEg uguale a CFN , per la somiglianza de' solidi AB , CD , sarà eziandio il parallelogrammo Kl uguale, e simile al parallelogrammo CN , e per la medesima ragione il parallelogrammo KM è uguale, e simile al parallelogrammo CR , ed ancora il parallelogrammo OEl al parallelogrammo DF , adunque tre parallelogrammi del solido KO sono uguali, e simili a tre parallelogrammi del solido CD , ma 24. di
i, tre a' tre opposti sono uguali, e si- ques.
mili, onde tutto il solido KO è uguale, e simile a tutto il solido CD : compiscasi il parallelogrammo, GK , e dalle basi GK , Kl , parallelogramme, e colla medesima altezza, che AB , compiscansi i solidi EX , IP , e perchè per la somiglianza de' solidi AB , CD è come la AE alla CF , così la EG alla FN , e la EH alla FR , e la FC è uguale alla EK , e la FN , alla El , e la FR alla EM ; r. del
sarà come la AE alla EK , così la sesto.
 GE alla El , e la HE alla EM , ma come la AE alla EK , così il paral-
N 6. lelo.

lelogrammo AG al parallelogrammo GK, e come la GE alla EI, così il parallelogrammo GK a KI, e come la HE alla EM, così il parallelogrammo PE a KM; come dunque il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK, così GK a KI, e PE a KM, ma come AG a GK, così il solido AB al solido EX, e co-

Per E a KM, ma come AG a GK, così il solido AB al solido EX, e co-
 11. del
 quin.



11. def. me GK a KI, così il solido XE al
 del. 5. solido PI, e come PE a KM, così
 il solido PI al solido KO, come dun-
 que il solido AB al solido EX, così
 EX a PI, e PI a KO, ma se siano
 quattro grandezze continuamente pro-
 porzionali, la prima alla quarta ha
 tripla proporzione di quella, che ha
 alla seconda, adunque ancora il soli-
 do A

LIBRO XI. 201

do AB al solido KO ha tripla proporzione di quella, che ha AB ad EX , ma come è AB ad EX , così è il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK , e la linea retta AE alla retta EK , onde il solido AB al solido KO averà tripla proporzione di quella, che ha AE alla EK , ma il solido KO è uguale al solido CD , e la linea retta EK è uguale alla retta CF , adunque il solido AB al solido CD ha tripla proporzione di quella, che ha il lato omologo AE al lato omologo CF , lo che bisognava dimostrare.

*Per
ant.
i. del
sesto.*

C O R O L L A R I O.

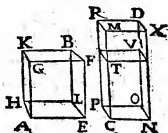
Da questo è chiaro, che se quattro linee rette siano proporzionali, come la prima alla quarta, così è il solido parallelepipedo, che si fa dalla prima, al solido parallelepipedo fatto dalla seconda simile, e similmente descritto, perciocchè la prima alla quarta ha tripla proporzione di quella, che ha alla seconda.

TEO.

E U C L I D E
T E O R E M A X X I X .
P R O P O S I Z I O N E X X X I V .

De' solidi parallelepipedì uguali le basi rispondono contrariamente all' altezze ; ed i solidi parallelepipedì , de' quali le basi rispondono contrariamente all' altezze , sono uguali fra loro .

Siano, i solidi parallelepipedì uguali AB , CD . Dico le basi loro rispondere contrariamente all' altezze , cioè come la base EH alla base NP , così essere l' altezza del solido CD all'



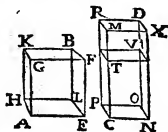
altezza del solido AB . Siano prima i dritti AG , EF , LB , HK , CM , NX , OD , PR perpendicolari alle basi loro . Dico come la base EH alla base NP , così essere la CM alla AG .

AG. Poichè se sia uguale la base EH alla base NP, ed è il solido AB uguale al solido CD, farà ancor la CM uguale alla AG, perciocchè, se essendo le basi EH, NP uguali, non siano l'altezze AG, CM uguali, nè anche il solido AB sarà uguale al solido CD, e si pone uguale: non è dunque l'altezza CM disuguale all'altezza AG, onde è necessario, che sia uguale, e però come la base EH alla base NP, così sarà la CM alla AG, dalle quali cose appare de' solidi parallelepipedi AB, CD le basi rispondere contrariamente all'altezze. Ma la base EH non sia uguale alla base NP, ma la EH sia maggiore, ed è il solido AB uguale al solido CD, adunque la CM è maggiore della AG, altrimenti seguirebbe altresì, che i solidi AB, CD non fossero uguali, che uguali si pongono; laonde pongasi la CT uguale alla AG, e dalla base NP, e coll'altezza CT compileasi il solido parallelepipedo VC, per liè dunque il solido AB è uguale al solido CD, ed è un altro solido VC, e le cose uguali alla medesima hanno la medesima proporzione, sarà come il solido AB al solido CV,

*Affiom.
3. del
quinta.*

32. di
ques. 25. di
ques. 1. del
sesto.

CV, così il solido CD al solido C
V, ma come il solido AB al solido
CV, così la base EH alla base NP,
perciocchè i solidi AB, CV sono u-
gualmente alti, e come il solido CD
al solido CV, così la base MP alla
base PT, o la linea retta MC alla
CT; come dunque la base EH
alla base NP, così la MC alla CT,
e la CT è uguale alla AG, adunque
è come la base EH alla base NP,

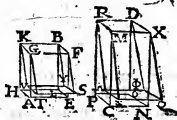


così la MC alla AG, onde le basi
de' solidi parallelepipedì uguali AB,
CD rispondono contrariamente all' al-
tezze. Ma le basi de' solidi parallele-
pipedì AB, CD rispondono contra-
riamente all' altezze, e sia come la
base EH alla base NP, così l' altez-
za del solido CD all' altezza del so-
lido AB. Dico il solido AB essere
uguale al solido CD. Siano medesi-
mamente i dritti perpendicolati alle
basi,

basi, e la base EH sia uguale alla
 base NP , ed è come la base EH al-
 la base NP , così l'altezza del solido
 CD all'altezza del solido AB : è ^{31. di}
 dunque l'altezza del solido CD ugua- *ques.*
 le all'altezza del solido AB , ma i
 solidi parallelepipedi, che sono nelle
 uguali basi, e della medesima altezza
 sono uguali fra loro, adunque il so-
 lido AB è uguale al solido CD . Ma
 non sia la base EH uguale alla base
 NP , e sia la EH maggiore; è dun-
 que l'altezza del solido CD maggio-
 re dell'altezza del solido AB , cioè
 la CM è maggiore della AG , pon-
 gasi di nuovo la CT uguale alla A
 G , e compiscasi similmente il solido
 CV , onde, perchè è come la base
 EH alla base NP , così la MC alla
 AG , e la AG è uguale alla CT ,
 sarà come la base EH alla base NP ,
 così MC a CT , ma come la base
 EH alla base NP , così il solido A
 B al solido CV ; perciocchè i solidi
 AB , CV sono ugualmente alti, e
 come la MC alla CT , così la base
 MP alla base PT , ed il solido CD
 al solido CV , come dunque il solido
 AB al solido CV , così il solido C
 D al solido CV , ed avendo amendue
 i so-

i solidi AB , CD la medesima porzione al solido CV , sarà il solido AB uguale al solido CD , lo che bisognava dimostrare.

Ma non siano i dritti FE , BL , GA , KH , XN , DO , MC , RP , perpendicolari alle basi loro, e da' punti F , G , B , K ; X , M , D , R , a' piani delle basi EH , NP tirinsi le perpendicolari, che tocchino i piani ne' punti S , T , Y , V , Q , Z , Ω , Φ , e compiscansi i solidi FV , $X\Omega$. Dico ancora, che essendo i so-



lidi AB , CD uguali, le loro basi rispondono contrariamente alle altezze, e come la base EH alla base NP , così è l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB , perchè il solido AB è uguale al solido CD , ed al solido AB è uguale il solido FV per essere nella medesima base FK , e della medesima altezza, de' quali i dritti non sono nelle medesime linee.

ret.

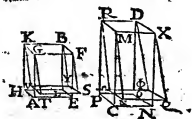
34. di
ques.

rette , ed il solido DC è uguale al solido XQ, che sono nella medesima base XR, e della medesima altezza ; i dritti de' quali non sono nelle medesime linee rette , sarà eziandio il solido FV uguale al solido XQ, ma degli uguali solidi parallelepipedì , l' altezze de' quali sono perpendicolari alle basi , le basi rispondono contrariamente alle altezze , è dunque come la base FK alla base XR , così l' altezza del solido XQ all' altezza del solido FV , ed è la base FK uguale alla base EH , e la base XR alla base NP , adunque come la base EH , alla base NP , così è l' altezza del solido XQ , all' altezza del solido FV , perciocchè sono le medesime altezze de' solidi XQ , FV , e parimente de' solidi DC , BA , come dunque la base EH alla base NP , così è l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB , e però le basi de' solidi parallelepipedì AB , CD rispondono contrariamente all' altezze . Oltre a questo le basi de' solidi parallelepipedì AB , CD rispondono contrariamente all' altezze , e sia come la base EH alla base NP , così l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB ,

Per le cose dimostrate innanzi.

Dico

Dico il solido AB essere uguale al solido CD , perchè fatte le medesime cose come la base EH alla base NP , così è l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB , e la base EH è uguale alla base FK , e NP ad XR , sarà come la base FK alla base XR , così l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB , e sono le medesima altezze de' solidi AB , CD ,



e de' solidi $X\Omega$, FV , come dunque la base FK alla base XR , così l' altezza del solido $X\Omega$ all' altezza del solido FV , onde le basi de' solidi parallelepipedi $X\Omega$, FV rispondono contrariamente all' altezze, e quei solidi parallelepipedi, de' quali le altezze sono perpendicolari alle loro basi, e le basi rispondono contrariamente all' altezze, sono fra loro uguali, adunque il solido FV è uguale al solido $X\Omega$; ma il solido FV è uguale al solido BA , perchè sono nella medesima

desima base FK , e della medesima altezza, i dritti de' quali non sono nelle medesime linee rette, ed il solido $X\Omega$ è uguale al solido DC , conciossiachè sieno nella medesima base XR , e della medesima altezza, e non nelle medesime linee rette, adunque il solido AB è uguale al solido CD , lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XXX.
PROPOSIZIONE XXXV.

Se due angoli piani sieno uguali, e nelle cime loro sieno costituite linee rette sublimi, che colle linee rette poste da principio contengano angoli uguali, l'uno all'altro; poi nelle sublimi sieno presi quali punti si vogliano, e da quelli a' piani, ne' quali sono i primi angoli, si tirino le perpendicolari, e da' punti fatti dalle perpendicolari ne' piani a' primi angoli si congiungano linee rette conterranno le dette linee colle sublimi uguali angoli.

Siano

Siano due angoli rettilinei uguali BAC , EDF , e da' punti A , D costituiransi sublimi rette linee AG , DM , che colle linee rette poste da principio contengano

angoli uguali, l'uno all'altro, cioè l'angolo MDE uguale all'angolo GAB , e l'angolo MDF uguale all'angolo GAC , e pigliansi nelle AG , DM quali punti si vogliano G , M , da' quali si tirino le GL , MN perpendicolari a' piani per



le BAC , EDF , che tocchino detti piani ne' punti L , N , e giungansi L A , N D . Dico l'angolo GAL essere uguale all'angolo MDN . Pongasi la AH uguale alla DM , e per H

8. *di ques.* tirisi la HK parallela alla GL , la GL è perpendicolare al piano per BAC , adunque eziandio la HK sarà perpendicolare al piano per BAC . Tirinsi da' punti K , N alle linee rette AB , AC , DE , DF le perpendicolari KB , KC , NF , NE , e giungansi HC , CB , MF , FE , perchè dunque il quadrato della HA è uguale
47. *del prim.*

L I B R O XI. 211

uguale a' quadrati delle HK , KA ,
 ed al quadrato della KA sono uguali
 i quadrati delle KC , CA ; sarà il
 quadrato della HA uguale a' quadrati
 delle HK , KC , CA , ed a' quadra-
 ti delle HK , KC è uguale il qua-
 drato della HC ; il quadrato dunque 48. del
 della HA sarà uguale a' quadrati del- prim.
 le HC , CA , e però l'angolo HC
 A è retto; e per la medesima ragio-
 ne l'angolo DFM è retto; onde l'
 angolo ACH è uguale all'angolo D
 FM , ed è l'angolo HAC uguale
 all'angolo MDF , sono dunque due
 triangoli MDF , HAC , che han-
 no due angoli uguali a due angoli,
 l'uno all'altro; ed un lato uguale
 ad un lato, che è sottoposto ad uno 26. del
 degli angoli uguali, cioè HA a DM ; prim.
 onde averanno ancor gli altri lati u-
 guali agli altri lati, l'uno all'altro,
 e sarà la AC uguale alla DF ; simil-
 mente dimostreremo eziandio la AB
 essere uguale alla DE . Giungansi H
 B , ME : e perchè il quadrato della
 AH è uguale a' quadrati delle AK ,
 KH , ed al quadrato della AK sono
 uguali i quadrati delle AB , BK sa-
 ranno i quadrati delle AB , BK , K
 H uguali al quadrato della AH , ma
 a' qua-

guale all'angolo FEN, il perchè sono due triangoli BCK, EFN, che hanno due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, cioè BC ad EF, adunque averanno gli altri lati uguali agli altri lati, è dunque la CK uguale alla FN, e la AC è uguale alla DF, onde le due AC, CK sono uguali alle due DF, FN, e contengono uguali angoli, la base dunque AK è uguale alla base DN, ed essendo la AH uguale alla DM, sarà ancora il quadrato, che si fa dalla AH, uguale al quadrato della DM; ma al quadrato della AH sono uguali i quadrati della AK, KH, perciocchè l'angolo AKH è retto, ed al quadrato della DM sono uguali i quadrati delle DN, NM, conciossiachè l'angolo DNM sia retto, adunque i quadrati delle AK, KH sono uguali a' quadrati delle DN, NM, de' quali il quadrato della AK è uguale al quadrato della DN, adunque il rimanente quadrato della KH è uguale al rimanente della MN, e però la linea retta HK è uguale alla MN, e perchè le due HA, AK sono u-

T. II. O gua-

4. del
prim.

47. del
prim.

guali alle due MD , DN , l'una all'altra, e la base HK si è dimostrata uguale alla base NM , sarà l'angolo HAK uguale all'angolo MDN , lo che bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O.

Da questo è chiaro, che se due angoli piani rettilinei sieno uguali, e da essi siano costituite linee rette sublimi uguali, che colle linee rette poste da principio contengano uguali angoli, l'uno all'altro, le perpendicolari, che da esso si tirano a' piani, ne' quali sono i primi angoli, sono uguali.

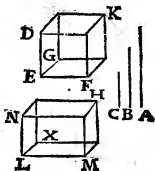
T E O R E M A XXXI.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Se tre linee rette sieno proporzionali, il solido parallelepipedo fatto dalle tre linee sarà uguale a quello, che si fa dalla linea di mezzo
essen-

essendo equilatero , ed equiangolo all' altro .

Siano tre linee rette proporzionali A, B, C , e sia come la A alla B , così la B alla C . Dico il solido , che si fa dalle A, B, C , essere uguale al solido , che si fa dalla B equilatero , ed equiangolo all' altro . Propongasi l'angolo solido E contenuto da tre angoli piani DEG, GEF, FED , ed

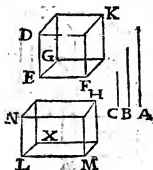


alla B pongasi uguale ciascuna di esse DE, EG, EF , e compiscasi il solido parallelepipedo EK , e pongasi la L M uguale alla A , e nella retta linea LM , e nel punto in essa L costituisca l'angolo solido contenuto dagli angoli MLX, XLM, MLN uguale all'angolo solido E , e pongasi alla B uguale

O 2

le

le la LX, e alla C uguale la LN, perchè dunque come è la A alla B, così è la B alla C, e la A è uguale alla LM, e la B a ciascuna di esse LX, EF, EG, ED, e la C alla LN, farà come la LM, alla EF, così la DE alla LN, e dintorno agli uguali angoli MLN, DEF i lati si rispodono contrariamente, adunque il parallelogrammo MN è uguale al parallelogrammo DF, e perchè due



angoli piani rettilinei sono uguali DF, NLM, ed in essi si costituiscono linee rette sublimi LX, EG uguali fra loro, e che colle linee rette poste da principio contengono gli angoli uguali, l'uno all'altro, saranno le perpendicolari, che si tirano da' punti G, X a' piani per le NLM, DEF uguali fra loro, adun-

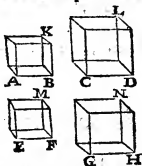
adunque i solidi LH , EK sono della medesima altezza; e que' solidi parallelepipedì, che sono nelle uguali basi, e della medesima altezza, sono fra loro uguali, il solido dunque HL è uguale al solido EK , ed è il solido HL quello, che si fa dalle tre A , B , C , ed il solido EK è quello, che si fa dalla B , laonde le tre linee rette siano proporzionali, il solido parallelepipedo fatto dalle tre linee sarà uguale a quello, che si fa dalla linea di mezzo, essendo equilatero, ed equiangolo all' altro, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XXXII.
PROPOSIZIONE XXXVII.

Se quattro linee rette siano proporzionali, i solidi parallelepipedì, che si fanno da esse simili, e similmente descritti saranno ancora proporzionali; e se i solidi parallelepipedì, che si fanno da esse simili, e similmente descritti siano proporzionali, le linee rette ancora saranno proporzionali. O 3 Sia-

Siano quattro linee rette proporzionali AB , CD , EF , GH , e sia come la AB , alla CD , così la EF , alla GH , e descrivansi dalle AB , CD , EF , GH solidi parallelepipedi simili e similmente posti KA , LC , ME , NG . Dico come KA ad LC , così essere ME ad NG . Perciocchè essendo il solido parallelepipedo KA simile ad LC , averà KA ad LC tripla proporzione di quella, che ha la AB

37. di
ques.



alla CD , per la medesima ragione il solido ME al solido NG averà tripla proporzione di quella, che ha la EF alla GH , ed è come la AB alla CD , così la EF alla GH , come dunque AK ad LC , così ME ad NG , ma sia come il solido AK al solido LG , così il solido ME al solido NG . Dico come la linea retta AB alla retta CD ,

ta CD , così essere la retta EF alla retta GH . Perciocchè avendo AK ad LC tripla proporzione di quella, che ha la AB alla CD , ed ME ad NG ha tripla proporzione di quella, che ha la EF alla GH , e come AK ad LC , così è ME a NG ; farà come la AB alla CD , così la AEF alla GH , se dunque quattro linee rette siano proporzionali, ec. lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XXXIII.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Se un piano sia retto, ovvero perpendicolare ad un altro piano, e da qualche punto di quelli, che sono in un piano all' altro piano sia tirata la perpendicolare, caderà quella nel comun segamento di detti piani.

Sia il piano CD al piano AB retto, ovvero perpendicolare, ed il comun segamento loro sia AD , e nel punto G



voglia E. Dico la perpendicolare, che dal punto E si tira al piano AB cadere nella AD. Non già, ma se essere può, cada fuori, come la EF, e tocchi il piano AB nel punto F, e da F alla DA nel piano AB tirisi la F

3. def. G perpendicolare, la quale eziandio sarà perpendicolare al piano CD, e giungasi EG. Perchè dunque la FG è perpendicolare al piano CD, e la linea retta EG, che è nel medesimo piano CD la tocca, sa-

rà l'angolo FGE retto, ma ancora la EF è perpendicolare al piano AB, onde l'angolo EFG è retto, e del triangolo EFG, due angoli sono uguali a due retti, che è inconveniente, non caderà dunque fuori della linea retta DA la perpendicolare tirata dal punto E al piano AB, e però è necessario, che cada in essa AD, se dunque un piano sia retto ad un altro piano ec-

17. del
prim.

lo che bisognava dimostrare.



TEOREMA XXXIV.
PROPOSIZIONE XXXIX.

Se in un solido parallelepipedo i
lati

lati de' piani opposti siano segati per mezzo, e per i segamenti si tirino i piani, il comun segamento de' piani, ed il diametro del solido parallelepipedo si segheranno per mezzo.

Nel solido parallelepipedo AF i lati degli opposti due piani FC , AH siano segati per mezzo ne' punti K , L , M , N , X , P , O , R ,

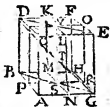


e per i segamenti si tirino i piani KN , XR , ed il comun segamento de' piani sia YS ed il diametro del solido parallelepipedo sia DG . Dico le YS , DG segarsi per mezzo, cioè la YT essere uguale alla TS , e la DT alla TG . Giungansi DY , YE , BS , SG . Perchè dunque la DX è parallela alla OE , gli angoli alterni $DX Y$, $Y O E$ sono fra loro uguali, e perchè la DX è uguale alla OE , e la XY alla YO , e contengono uguali angoli; farà la base DY uguale alla base YE , ad il triangolo $DX Y$ uguale al triangolo $Y O E$, e gli altri angoli agli altri angoli, adunque l'angolo

29. del
prim.

24. del
prim.

- golo XYD è uguale all' angolo OY
 E ; e però la DYE è linea retta, e
 per la medesima ragione ancora è ret-
 ta la BSG , ed è la BS uguale alla
 SG , e perchè la CA è uguale, e
 9. di parallela alla DB , ed è uguale, e
 ques. parallela alla EG , farà ancora la D
 B alla EG , uguale, e parallela, e
 le linee rette DE , GB le congiun-
 33. del gono, è dunque la DE parallela alla
 prim. GB , e si sono presi in amendue qua-
 7. di li si vogliono punti D , Y , G , S ,
 ques. e sono giunte le DG , YS , onde le
 DG , YS sono in un piano, ed ef-
 sendo la DE parallela alla BC , farà
 l'angolo EDT uguale all' angolo B
 29. del GT , perciocchè sono alterni: ed è
 prim. l'angolo DTY u-
 11. del guale all' angolo G
 prim. TS , adunque sono
 due triangoli DTY ,
 GTS , che hanno
 due angoli uguali a
 due angoli, ed un
 lato uguale ad un lato, che è sotto-
 posto ad uno degli angoli uguali,
 cioè DY a GS , che sono la metà
 26. del delle DE , BG , averanno dunque
 prim. gli altri angoli uguali agli altri angoli,
 onde la DT è uguale alla TG ,
 e la



e la YT alla TS, e però se in un solido parallelepipedo i lati de' piani opposti siano legati per mezzo, ecco che bisognava dimostrare.

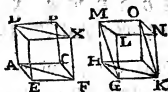
TEOREMA XXXV.

PROPOSIZIONE XL.

Se siano due prismi ugualmente alti, de' quali uno abbia un parallelogrammo per base, e l'altro un triangolo, e sia il parallelogrammo doppio del triangolo, detti prismi faranno fra loro uguali.

Siano i prismi ugualmente alti AD XFE, GHMOK, ed uno abbia per base il parallelogrammo HK, e l'altro il triangolo EAF, ed il parallelogrammo HK sia doppio del triangolo EAF. Dico il prisma ADXFE essere uguale al prisma GHMOK. Compiscansi i solidi AX, GO, e perchè il parallelogrammo HK è doppio del triangolo EAF; ed ancora il parallelogrammo HK è doppio del triangolo GHK, sarà il parallelogrammo AF uguale al parallelogrammo

38. di
ques. mo HK, ma i solidi parallelepipedi, che sono nelle uguali basi, e della medesima altezza, sono fra loro uguali, adunque il solido AX è uguale al solido GO, ed è il prisma A DX F



È la metà del solido AX, ed il prisma GHMOK la metà del solido GO, adunque il prisma A DX FE è uguale al prisma GHMOK, onde se siano due prismi ugualmente alti, e, lo che bisognava dimostrare.

*Fine dell' Undecimo
Libro.*



DE.



D E G L I
ELEMENTI
 D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO DUODECIMO

E D E' SOLIDI

LIBRO SECONDO



T E O R E M A

PROPOSIZIONE I.



Poligoni simili, che si de-
 scrivano ne' cerchi, sono
 fra loro come i quadrati
 de' diametri.

Siano i cerchi ABCDE, FGH
 KL, ed in essi poligoni simili ABC
 DE,

LIBRO EUCLIDE

DE, FGHL, ed i diametri de' cerchi siano BM, GN. Dico come il quadrato della BM al quadrato della GN, così essere il poligono AB CDE al poligono FGHL, giunganfi BE, AM, GL, FN, e perchè il poligono ABCDE è simile al poligono FGHL, ancora l'angolo BAE è uguale all'angolo GF



L, ed è come la BA alla AE, così la GF alla FL, adunque sono due triangoli BAE, GFL, che hanno un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAE all'angolo GFL, e dintorno agli uguali angoli i lati proporzionali, onde il triangolo ABE
 21. del è equiangolo al triangolo FGL, e
 terzo. però l'angolo AEB è uguale all'angolo FLG, ma l'angolo AEB è uguale all'angolo AMB, perchè si fermano nella medesima circonferenza, e l'angolo FLG è uguale all'angolo F
 31. del NG, adunque ancora l'angolo AM
 terzo. B è uguale all'angolo FNG, ma l'angolo BAM retto è uguale al retto
 GF

GFN, onde il rimanente è uguale al rimanente, è dunque il triangolo AMB equiangolo al triangolo FNG, e perciò come è la BM alla G 2. del N, così è la BA alla GF, ma la 6. del 29. proporzione del quadrato della BM Caroll. al quadrato della GN è doppia della del 29. proporzione della BM alla GN, e del 6. della proporzione di BA a GF è doppia. 10. pia la proporzione del poligono ABCDE al poligono FGHL, come dunque il quadrato della BM al quadrato della GN, così il poligono ABCDE al poligono FGHL, onde i poligoni simili, che si descrivono ne' cerchi, sono fra loro come i quadrati de' diametri,

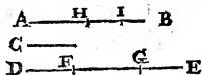
AVVERTIMENTO.

La seguente Proposizione, che è la Prima del Decimo Libro d' Euclide, si è posta in questo luogo, come necessaria per bene intendere molte delle Proposizioni, che ne vengono appresso in questo Libro Duodecimo.

Date due grandezze disuguali, se dalla maggiore se ne levi più della
me-

metà, e dal restante più della metà, e questo si faccia sempre, si lascerà finalmente una certa grandezza, che sarà minore della minore proposta grandezza.

Siano due proposte grandezze ineguali AB , e C , la maggiore delle quali sia AB . Dico, che se da AB se ne levi più della metà, e dal rimanente di nuovo se ne levi più della metà, e questo si faccia sempre:



se ne lascerà finalmente una certa grandezza, che sarà minore della C . Si moltiplichi C tante volte, finchè la grandezza fatta DE sia maggiore di AB . Divisa poi la DE nelle parti DF , FG , GE uguali a C , si levi dalla AB più della metà AH , e dal restante HB più della metà HI , e questa si seguiti a fare finchè le parti della medesima AB siano uguali di numero alle parti DF , FG , GE .

Per-

Perchè dunque DE è maggiore di AB , e dalla DE si è levata la parte DF minore della metà, o pure la metà, se DE sia doppia di C , e dalla AB se ne è levata AH più della metà, sarà la rimanente FE maggiore della rimanente HB (imperocchè essendo DE maggiore di AB , se dalla DE se ne levasse la metà, e dalla AB se ne levasse pure la metà, farebbe tuttavia il rimanente di DE maggiore del rimanente AB . Se dunque dalla DE se ne levi meno della metà, o la metà, e dalla AB più della metà; sarà tanto più il rimanente di DE maggiore del rimanente di AB .) Di nuovo, perchè FE è maggiore di HB , e dalla FE se ne leva la metà, o meno della metà, se FE sia maggiore del doppio di C ma dalla HB si leva HI maggiore della metà di HB , rimarrà uell' istessa maniera il restante GE maggiore del rimanente IB ; e così seguitando si dimostrerà finalmente l'ultima parte di DE , cioè GE essere maggiore dell'avanzo di AB , cioè di IB . Essendo dunque GE uguale a C , sarà ancora C maggiore di IB . Adunque si è lasciata della AB una grandezza IB minore.

re della C. Dunque se da due grandezze disuguali, ec. lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A II.

PROPOSIZIONE II.

I cerchi fra loro sono come i quadrati de' diametri.

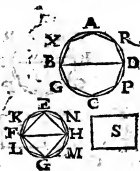
Siano i cerchi *ABCD*, *EFGH*, e i diametri loro siano *BD*, *FH*. Dico come il quadrato di *BD* al quadrato di *FH*, così essere il cerchio *ABCD* al cerchio *EFGH*; perciocchè, se non è così, sarà come il quadrato di *BD* al quadrato di *FH*, così il cerchio *ABCD* ad uno spazio o minore, o maggiore del cerchio *EFGH*, sia prima ad un minore, che sia *S*, e nel cerchio *EFGH* descrivasi il quadrato *EFGH*, il quadrato, che è descritto nel cerchio, è maggiore della metà del cerchio *EFGH*, perchè, se tiriamo per i punti *E*, *F*, *G*, *H* linee rette, che tocchino il cerchio, sarà il quadrato *EFGH* la metà del quadrato descritto di esterno al cerchio, ma il cerchio è minore.

minore del quadrato descritto dintorno ad esso, adunque il quadrato EFGH è maggiore della metà del cerchio EFGH. Seghinsi per mezzo le circonferenze EF, FG, GH, HE ne' punti K, L, M, N, e giungansi EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, adunque ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore, che la metà della por-



zione del cerchio, nella quale egli consiste, perchè se tiriamo per i punti K, L, M, N linee rette, che tocchino il cerchio, e finiamo i parallelogrammi, che sono nelle linee rette EF, FG, GH, HE, sarà ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE la metà del parallelogrammo, nel quale è descritto, ma la porzione è minore del parallelogrammo.

grammo, adunque ciascuno de' triangoli EKF , FLG , GMH , HNE è maggiore, che la metà della porzione del cerchio, nella quale consiste, adunque segnando l'altre circonferenze per mezzo, e giungendo le linee rette, e facendo questo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cerchio, che faranno minori dell'eccesso, nel quale il cerchio $EFGH$



avanza lo spazio S ; donde siano lasciate le porzioni del cerchio $EFGH$ nelle linee rette EK , KF , FL , LG , GM , MH , HN , NE , che siano minori dell'eccesso, nel quale il cerchio $EFGH$ avanza lo spazio S , adunque il rimanente poligono $EKFLGMHN$ sarà maggiore dello spazio S . descrivasi ancora nel cerchio $ABCD$ il poligono $AXBGCQDR$ simile

Per
dimostrare

mile al poligono $EKFLGMHN$; adunque come il quadrato di BD al quadrato di FH , così è il poligono $AXBGCPDR$ al poligono $EKFLGMHN$, ma come il quadrato di BD al quadrato di FH , così è il cerchio $ABCD$ allo spazio S , adunque eziandio come il cerchio $ABCD$ allo spazio S , così il poligono $AXBGCPDR$ al poligono $EKFLGMHN$; e permutandoli come il cerchio $ABCD$ al poligono, che è in esso, così lo spazio S al poligono $EKFLGMHN$; ma il cerchio $ABCD$ è maggiore del poligono che è in esso, onde ancora lo spazio S è maggiore del poligono $EKFLGMHN$, ma è minore, che è impossibile, non è dunque come il quadrato di BD al quadrato di FH , così il cerchio $ABCD$ a qualche spazio minore del cerchio $EFGH$. Similmente dimostreremo non essere come il quadrato di FH al quadrato di BD , così il cerchio $EFGH$ a qualche spazio minore del cerchio $ABCD$. Dico dunque nè anche essere come il quadrato di BD al quadrato di FH , così il cerchio $ABCD$ a qualche spazio maggiore del cerchio $EFGH$. Perciocchè,

Aff. 6.

del. 5.

chè, se egli è possibile, sia ad uno spazio maggiore S , farà dunque convertendoli come il quadrato di FH al quadrato di BD , così lo spazio S al cerchio $ABCD$, ma come lo spazio S al cerchio $ABCD$, così il cerchio $EFGH$ a qualche spazio minore del cerchio $ABCD$, come si dimostrerà, adunque è come il quadrato di FH al quadrato di BD , così il cerchio $EFGH$ a qualche spazio minore del cerchio $ABCD$, lo che si è dimostrato impossibile, non è dunque come il quadrato di ED al quadrato di FH , così il cerchio $ABCD$ ad uno spazio maggiore del cerchio $EFGH$, e si è dimostrato non essere anche a un minore, onde come il quadrato di BD al quadrato di FH , così sarà il cerchio $ABCD$ al cerchio $EFGH$; i cerchi dunque fra loro sono come i quadrati de' diametri, lo che bisognava dimostrare.

L E M M A.

Laonde dico, che se lo spazio S sia maggiore del cerchio $EFGH$, come lo spazio S al cerchio $ABCD$,
D,

D , così il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD.

Facciasi come lo spazio S al cerchio ABCD , così il cerchio EFGH ad un altro spazio. Dico questo esser minore del cerchio ABCD , perciocchè essendo come lo spazio S al cerchio ABCD , così il cerchio EFGH ad un altro spazio , sarà permutandoli come lo spazio S al cerchio EFGH , così il cerchio ABCD a detto spazio , ma lo spazio S è maggiore del cerchio EFGH , adunque ancora il cerchio ABCD è maggiore di detto spazio : e però come lo spazio S al cerchio ABCD , così è il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD.

T E O R E M A III.

PROPOSIZIONE III.

Ogni piramide , che ha la base triangolare si divide in due piramidi uguali , e simili fra loro , che hanno le basi triangolari , e simili a
tut-

tutta , e in due prismi uguali , che sono maggiori della metà di tutta la piramide .

Sia la pitamide , la cui base sia il triangolo ABC , e la cima il punto D . Dico la piramide $ABCD$ dividersi in due piramidi uguali , e simili tra loro , che hanno le basi triangolari , e simili a tutta , e in due prismi uguali , e i due prismi essere maggiori della metà

di tutta la piramide . Seghinsi le AB , BC , CA , AD , DB , DC per mezzo ne' punti E , F , G , H , K , L , e giungansi EH , EG , GH , HK , KL , LH , EK , KF , FG , perchè



2. del
sesto.

34. del
prim.

19. del
prim.

dunque la AE è uguale alla EB , e la AH alla HD , sarà la EH parallela alla DB , e per la medesima ragione la HK è parallela alla AB . è dunque $HEBK$ parallelogrammo , onde la HK è uguale alla EB , ma la EB è uguale alla AE , adunque ancora la AE sarà uguale alla HK , ed è la

è la AH uguale alla HD , onde le AE, AH sono uguali alle due KH, HD l'una all'altra, e l'angolo EAH uguale all'angolo KHD , adunque la base EH è uguale alla base KD , e il triangolo AEH uguale, e simile al triangolo HKD , e per la medesima ragione ancora il triangolo AHG uguale, e simile al triangolo HLD , e perchè le due linee rette, che si toccano EH, HG , sono parallele a due linee rette, che si toccano KD, DL , ma non nel medesimo piano, conterranno angoli uguali; adunque l'angolo EHG è uguale all'angolo KDL , similmente perchè due linee rette EH, HG sono uguali alle due KD, DL , l'una all'altra, e l'angolo EHG è uguale all'angolo KDL , farà la base EG uguale alla base KL , è dunque uguale, e simile il triangolo EHG al triangolo KDL , e per la medesima ragione il triangolo AEG è uguale, e simile al triangolo HKL , laonde la piramide, la cui base è il triangolo AEG , e la cima il punto H , è uguale, e simile alla piramide, la cui base è il triangolo HKL , e la cima il punto D , è perchè ad un lato del

T. II. P trian-

29. del
 prima.

10. del-
 P II.

triangolo ADB , cioè alla AB si è tirata la HK parallela, farà il triangolo ADB al triangolo DHK equiangolo, ed hanno i lati proporzionali, è dunque il triangolo ADB simile al triangolo DHK , e per la medesima ragione il triangolo DBC simile al triangolo DKL , ed il triangolo ADC al triangolo DHL , ed essendo due linee rette BA , AC , che si toccano parallele alle due KH , HL , che si toccano, e non sono nel medesimo piano, conterranno angoli uguali, onde l'angolo BAC è uguale all'angolo KHL , ed è come la BA alla AC , così la KH alla HL , adunque il triangolo ABC è simile al triangolo HKL , e però la piramide, la cui base è il triangolo ABC , e la cima il punto D è simile alla piramide, la cui base è il triangolo HKL , e la cima il punto D , si è dimostrata simile alla piramide, la cui base è il triangolo AEF , e la cima il punto H , onde la piramide, la cui base è il triangolo ABC ,



C, e la cima il punto D, è simile alla piramide, la cui base è il triangolo AEG, e la cima il punto H, adunque amendue le piramidi AEGH, HKLD sono simili a tutta la piramide ABCD, e perchè la BF è uguale alla FC, sarà il parallelogrammo EBFG doppio del triangolo GFC, e perchè sono due prismi ugualmente alti, l' uno de' quali ha per base il parallelogrammo, e l' altro il triangolo, ed è il parallelogrammo doppio del triangolo; saranno detti prismi uguali fra loro, adunque il prisma contenuto da' due triangoli BKF, ed EHG, e da' tre parallelogrammi EBFG, EBKH, KHGF è uguale al prisma contenuto da' due triangoli GFC, HKL, e da' tre parallelogrammi KFCL, LCGH, HKFG, ed è manifesto ancora l' uno, è l' altro prisma, e quello, la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta HK opposta ad esso, e quello, la cui base è il triangolo GFC, ed il triangolo K LH opposto ad esso essere maggiore dell' una, e l' altra delle piramidi, la cui base sono i triangoli AEG, HKL, e le cime i punti H, D; per-

ciocchè se giungiamo le linee rette EF, EH il prisma, la cui base è il parallelogrammo EBFG e la linea opposta ad esso HK, e maggiore della piramide, la cui base è il triangolo EBF, e la cima il punto K; ma la piramide, la cui base è il triangolo EBF, e la cima il punto K, è uguale alla piramide la cui base è il triangolo AEG, e la cima il punto H, per essere contenute da uguali, e simili piani, onde il prisma, la cui base è il parallelogrammo



EBFG, e la linea retta HK opposta ad esso, è maggiore della piramide; la cui base è il triangolo AEG, e la cima il punto H, ed il prisma, la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta HK opposta ad esso, è uguale al prisma, la cui base è il triangolo GFC, ed opposto ad esso il triangolo HKL, e la piramide, la cui base è il triangolo AEG, e la cima il punto H, è uguale alla piramide, la cui base è il triangolo HKL, e la cima il punto D,

D, adunque i due prismi, de' quali si è detto, sono maggiori delle due dette piramidi, le basi delle quali sono i triangoli AEG, HKL, e le cime i punti H, D, onde tutta la piramide, la cui base è il triangolo ABC, e la cima il punto D, è divisa in due piramidi uguali, e simili fra loro, e simili a tutta, ed in due prismi uguali, e sono i due prismi maggiori della metà di tutta la piramide, lo che bisognava dimostrare.

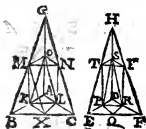
T E O R E M A IV.

PROPOSIZIONE IV.

Se siano due piramidi ugualmente alte, che abbiano le basi triangolari, e l' una, e l' altra di loro si divida in due piramidi uguali, e simili a tutta, ed in due prismi uguali, e delle piramidi fatte l' una, e l' altra si divida nel medesimo modo, e ciò si faccia sempre, faranno come la base di una piramide alla base dell' altra, così ancora tutti i pri-

prismi, che sono in una piramide a tutti i prismi, che sono nell' altra di numero uguali.

Siano due piramidi ugualmente alte, che abbiano le basi triangolari ABC , DEF , e le cime siano i punti G , H , e l' una, e l' altra di esse dividasi in due piramidi fra loro uguali, e simili a tutta, ed in due prismi uguali, e delle piramidi fatte

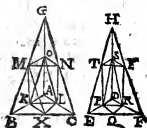


l' una, e l' altra s' intenda divisa nel medesimo modo, e questo si faccia sempre. Dico come la base ABC alla base DEF , così essere tutti i prismi, che sono nella piramide $ABCG$ a tutti i prismi, che sono nella piramide $DEFH$ di numero uguali. Perciocchè essendo la BX uguale alla XC , e la AL uguale alla LC , sarà la XL parallela alla AB , ed il triangolo

2. del
sesto.

angolo ABC simile al triangolo LXC , e per la medesima ragione il triangolo DEF è simile al triangolo RQF , e perchè la BC è doppia della CX , e la EF doppia della FQ , come la BC alla CX ; così sarà la EF alla FQ , e dalle BC , CX sono descritti rettilinei simili, e similmente posti ABC , LXC , e dalle EF , FQ rettilinei DEF , RQF simili, e similmente posti, è dunque come il triangolo BAC al triangolo LXC , così il triangolo DEF al triangolo RQF , e permutandogli come il triangolo ABC al triangolo DEF , così il triangolo LXC al triangolo RQF , ma come il triangolo LXC al triangolo RQF , così il prisma, la cui base è il triangolo LXC , ed opposto ad esso OMN al prisma, la cui base è il triangolo RQF , e ad esso opposto STY , come dunque il triangolo ABC al triangolo DEF , così il prisma, la cui base è il triangolo LXC , ed opposto ad esso OMN al prisma, la cui base è il triangolo RQF , e ad esso opposto STY , e perchè due prismi, che sono nella piramide $ABCG$, sono fra loro uguali, e fra loro uguali ancora i prismi,

ima, che sono nella piramide DEFH, sarà come il prisma, la cui base è il parallelogrammo KLXB, e ad esso opposta la linea retta MO, al prisma, la cui base è il triangolo LXC, ed opposto ad esso OMN, così il prisma, la cui base è il parallelogrammo EPRQ, e ad esso opposta la linea retta ST, al prisma, la cui base è il triangolo RQF, ed opposto ad esso STY, laonde componen-

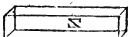


doli come i prismi KBXLMO, LXCMNO al prisma LXCMNO, così i prismi PEQRST, RQFSTY al prisma RQFSTY, e permutandoli come i prismi KBXLMO, LXCMNO a' prismi PEQRST, RQFSTY, così il prisma LXCMNO al prisma RQFSTY, e come il prisma LXCMNO al prisma RQFSTY, così si è dimostrata la base LXC alla base RQF, e la ba-

la base ABC alla base DEF ; dunque come il triangolo ABC al triangolo DEF , così i due prismi che sono nella piramide $ABCG$ a' due prismi, che sono nella piramide $DEFH$. Similmente ancora, se dividiamo le piramidi fatte nel medesimo modo, come $OMNG$, $STYH$, sarà come la base OMN alla base STY , così i due prismi, che sono nella piramide $OMNG$, a' due prismi, che sono nella piramide $STYH$, ma come la base OMN alla base STY , così è la base ABC alla base DEF , come dunque la base ABC alla base DEF , così i due prismi, che sono nella piramide $ABCG$, a' due prismi, che sono nella piramide $DEFH$, e i due prismi, che sono nella piramide $OMNG$, a' due prismi, che sono nella piramide $STYH$, e i quattro a' quattro; le medesime cose ancora si dimostreranno ne' prismi fatti per la divisione delle piramidi $AKLO$, e $DPRS$, e di tutti similmente di numero uguali, che è quello, ec.

Le piramidi , che hanno la medesima altezza , e le basi triangolari , sono fra loro come le basi .

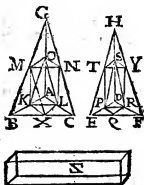
Siano le piramidi della medesima altezza $ABCG$, $DEFH$, le cui basi siano i triangoli ABC , DEF , e le cime i punti G , H . Dico come la base ABC alla base DEF , così es-



sere la piramide $ABCG$ alla piramide $DEFH$. Perciocchè , se non è così , sarà come la base ABC alla base DEF , così la piramide $ABCG$ o ad un solido minore della piramide $DEFH$, o ad un maggiore , sia prima

ma ad un solido minore, che sia Z ,
 e dividasi la piramide $DEFH$ in due
 piramidi uguali fra loro, e simili a ^{3. de}
 tutta, e in due prismi uguali, sono ^{ques.}
 dunque i due prismi maggiori della
 metà di tutta la piramide, e le pira-
 midi fatte dalla divisione similmente
 si dividono, e questo facciasi sempre,
 finchè siano prese alcune piramidi dal-
 la piramide $DEFH$, che siano mi-
 nori dell' eccello, nel quale la pira-
 mide $DEFH$ avanza il solido Z , pi-
 glinfi dunque, e siano per esempio
 le piramidi $DPRS$, $STYH$, saran-
 no i rimanenti prismi nella piramide
 $DEFH$ maggiori del solido Z , divi-
 dasi ancor la piramide $ABCG$ in al-
 trettante parti, come la piramide D
 EFH , onde come la base ABC alla
 base DEF , così i prismi, che sono
 nella piramide $ABCG$, a' prismi,
 che sono nella piramide $DEFH$, ma
 come la base ABC alla base DEF ,
 così la piramide $ABCG$ al solido Z ,
 come dunque la piramide $ABCG$ al
 solido Z , così i prismi, che sono
 nella piramide $ABCG$ a' prismi nel-
 la piramide $DEFH$, e permutandoli
 come la piramide $ABCG$ a' prismi,
 che sono in essa, così il solido Z a'
 pri-

prismi, che sono nella piramide DE FH, ma la piramide ABCG è maggiore de' prismi, che sono in essa; adunque ancora il solido Z è maggiore de' prismi, che sono nella piramide DEFH, ma è minore, che è impossibile, non è dunque come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG a qualche solido minore della piramide DEFH, simil-



mente dimostreremo non essere ancora come la base DEF alla base ABC, così la piramide DEFH a qualche solido minore della piramide ABCG. Dico dunque non esser come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG a qualche solido maggiore della piramide DEFH, perciocchè sia un maggiore, se egli è pos-

possibile, come al solido Z, sarà convertendole come la base DEF alla base ABC, così il solido Z alla piramide ABCG, ma come il solido Z alla piramide ABCG, così la piramide DEFH al solido minore della piramide ABCG, come si è poco fa dimostrato, come dunque la base DEF alla base ABC, così la piramide DEFH a qualche solido minore della piramide ABCG, lo che è inconveniente, onde non è come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG a qualche solido maggiore della piramide DEFH, e si è dimostrato non esser anche a un minore, come dunque la base ABC alla base DEF, così è la piramide ABCG alla piramide DEFH, e perciò le piramidi, che hanno la medesima altezza, e le basi triangolari sono fra loro come le basi, lo che bisognava dimostrare.

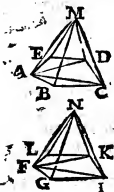
*Lem.
ma del
2. di
ques.*

T E O R E M A VI.
PROPOSIZIONE VI.

Le piramidi, che hanno la medesima altezza, e le basi di molti
an-

angoli sono fra loro come le basi.

Siano le piramidi, le quali hanno la medesima altezza, e le basi di molti angoli $ABCDE$, $FGIKL$, e le cime i punti M , N . Dico come la base $ABCDE$ alla base $FGIKL$, così essere la piramide $ABCDEM$ alla piramide $FGIKLN$. Dividasi la base $ABCDE$ in triangoli ABC , ACD , ADE , e la base $FGIKL$ dividasi in triangoli FGI , FIK , FKL , ed in ciascun triangolo intendansi le piramidi così alte, come le



piramidi da principio perchè dunque è come il triangolo ABC al triangolo ACD , così la piramide $ABCM$ alla piramide $ACDM$, farà compon-

nendo come il trapezio $ABCD$ al
 triangolo ACD , così la piramide A
 $BCDM$ alla piramide $ACDM$, ma
 come il triangolo ACD al triangolo
 ADE , così la piramide $ACDM$ al-
 la piramide $ADEM$, adunque per
 l'uguaglià in proporzione ordinata co-
 me la base $ABCD$ alla base ADE ,
 così la piramide $ABCDM$ alla pira-
 mide $ADEM$, e similmente compo-
 nendole come la base $ABCDE$ alla
 base ADE , così la piramide ABC
 DEM alla piramide $ADEM$, e per
 la medesima ragione come la base F
 $GIKL$ alla base FKL , così la pira-
 mide $FGIKLN$ alla piramide FK
 LN , e perchè sono due piramidi A
 DEM , $FKLN$, che hanno le basi
 triangolari, ed hanno la medesima al-
 tezza, sarà come la base ADE alla
 base FKL , così la piramide ADE
 M alla piramide $FKLN$, ed essendo
 come la base $ABCDE$ alla base A
 DE , così la piramide $ABCDEM$
 alla piramide $ADEM$, e come la
 base ADE alla base FKL , così la
 piramide $ADEM$ alla piramide FK
 LN , sarà per l'uguaglià in propor-
 zione ordinata come la base $ABCD$
 E alla base FKL , così la piramide
 AB

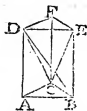
ABCEM alla piramide FKLN, ma come la base FKL alla base FG IKL, così era ancor la piramide F KLN alla piramide FGIKLN, onde similmente per l' uguaglià in proporzione ordinata come la base AB CDE alla base FG IKL, così è la piramide ABCEM alla piramide FGIKLN. Adunque le piramidi, che hanno le medesima altezza, e le basi di molti angoli, sono fra loro come le basi, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A VII.
PROPOSIZIONE VII.

Ogni prisma, che ha la base triangolare, si divide in tre piramidi uguali fra loro, che hanno le basi triangolari.

Sia il prisma ABCDEF, la cui base il triangolo ABC, e ad esso opposto il triangolo DEF. Dico il prisma ABCDEF dividersi in tre piramidi uguali fra loro, che hanno le basi triangolari. Gungansi BD, EC, CD, perchè AB, ED è parallelo-gram-

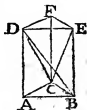
grammo, il cui diametro BD, sarà ^{34. del}
il triangolo ABD uguale al triango- ^{prim.}
lo EBD. Adunque la piramide, la ^{5. di}
cui base è il triangolo ABD, e la ^{ques.}
cima il punto C, è uguale alla pira-
mide, la cui base è il triangolo EB
D, e la cima il punto



C, ma la piramide, la
cui base è il triangolo
EBD, e la cima il
punto C è la medesima,
che la piramide, la cui
base è il triangolo EB

C, e la cima il punto D, perciocchè
sono contenute da' medesimi piani,
adunque ancora la piramide, la cui
base è il triangolo ABD, e la cima
il punto C, è uguale alla piramide,
la cui base è il triangolo EBC, e la
cima il punto D, similmenie perchè
FCBE è parallelogrammo, il cui
diametro CE, sarà il triangolo EC
F uguale al triangolo CBE, onde
eziandio la piramide, la cui base è
il triangolo BEC, e la cima il pun-
to D, è uguale alla piramide, la cui
base è il triangolo ECF, e la cima
il punto D; ma la piramide, la cui
base è il triangolo BCE, e la cima
il punto D, si è dimostrata uguale
alla

alla piramide, la cui base è il triangolo ABD , e la cima il punto C , e perciò ancora la piramide, la cui base è il triangolo CEF , e la cima il punto D , è uguale alla piramide, la cui base è il triangolo ABD , e la cima il punto C ; adunque il prisma $ABCDEF$ è diviso in tre piramidi uguali fra loro, che hanno le basi triangolari; e perchè la piramide, la cui base è il triangolo ABD , e la cima il punto C , è la medesima, che la piramide, la cui base è il triangolo CAB , e la cima il punto D , conciossiachè sieno contenute da' medesimi piani; ma la piramide, la cui base è il triangolo ABD , e la cima il punto C , si è dimostrata la terza parte del prisma, la cui base è il triangolo ABC , ed opposto ad esso il triangolo DEF : sarà la piramide, la cui base è il triangolo ABC , e la cima il punto D , la terza parte del prisma, che ha la medesima base, cioè il triangolo ABC , ed opposto ad esso il triangolo DEF , che è quello, cc.



CO.

LIBRO XII. 355
COROLLARIO.

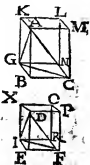
Da questo è chiaro, che ogni piramide è la terza parte del prisma, che ha la medesima base, e uguale altezza.

T E O R E M A VIII.
PROPOSIZIONE VIII.

Le piramidi simili, che hanno le basi triangolari, sono in tripla proporzione di quella, che hanno i lati omologhi fra loro.

Siano le piramidi simili, e similmente poste, le cui basi siano i triangoli ABC , DEF , e le cime i punti G , I . Dico la piramide $ABCG$ alla piramide $DEFI$ avere proporzione tripla di quella, che ha la BC alla EF . Compiscansi i solidi parallelepipedi $GBML$, $EIPO$, e perchè la piramide $ABCG$ è simile alla piramide $DEFI$, sarà l'angolo ABC uguale all'angolo DEF , e l'angolo GBC uguale all'angolo IEF , *9. def.*
e l'

e l'angolo ABG all'angolo DEI , ed è come la AB alla DE , così la BC alla EF , e la BG alla EI , perchè dunque come la AB alla DE , così la BC alla EF , e dintorno agli uguali angoli i lati sono proporzionali; farà il parallelogrammo BM simile al parallelogrammo EP , e per la medesima ragione il parallelogrammo BN è simile al parallelogrammo ER , ed il parallelogrammo BK al parallelogrammo EX , adunque i tre parallelogrammi BM , KB , BN sono simili a EP , EX , ER ; ma i tre MB , BK , BN a' tre opposti sono simili, ed uguali, e i tre EP , EX , ER sono simili, ed uguali a' tre opposti, onde i solidi $BGML$, $EIPO$ sono contenuti da' piani simili, e di numero uguali, e però il solido $BGML$ è simile al solido $EIPO$, ma i simili solidi parallelepipedi sono in tripla proporzione de' lati omologhi, adunque il solido $BGML$ al solido $EIPO$ ha tripla proporzione di quella, che ha il lato omologo



logo BC al lato omologo EF , ma come il solido $BGML$ al solido $EIPO$, così la piramide $ABCG$ alla piramide $DEFI$, perciocchè la piramide è la sesta parte del solido, essendo il prisma, che è la metà del solido parallelepipedo, triplo della piramide, onde ancora la piramide $ABCG$ alla piramide $DEFI$ averà tripla proporzione di quella che ha la BC alla EF , che è quello, ec.

C O R O L L A R I O.

Da questo appare le simili piramidi, che hanno le basi di molti angoli, essere fra loro in proporzione tripla di quella, che hanno i lati omologhi.

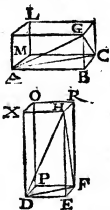
T E O R E M A IX.

PROPOSIZIONE IX.

Delle piramidi uguali, e che hanno le basi triangolari, le basi rispondono contrariamente all' altezze; e quelle piramidi, che hanno le
basi

basi triangolari, delle quali le basi rispondono contrariamente all' altezza, sono uguali fra loro.

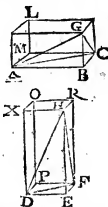
Siano le piramidi uguali, che abbiano le basi triangolari ABC , DEF , e le cime i punti G , H . Dico le basi delle piramidi $ABCG$, $DEFH$ rispondere contrariamente all' altezze, e come la base ABC alla base DEF , così essere l' altezza della piramide $DEFH$ all' altezza della piramide $ABCG$. Compilansì i solidi parallelepipedi $BGML$, $EHPO$, e perchè la piramide $ABCG$ è uguale alla piramide $DEFH$,



ed il solido $BGML$ è sestuplo della
 9. del piramide $ABCG$, ed il solido EH
 34. del PO è sestuplo della piramide DEF
 l' ant. H , farà il solido $BGML$ uguale al
 solido $EHPO$, e le basi de' solidi
 parallelepipedi uguali rispondono all'
 altezze contrariamente, come dunque
 la ba-

la base BM alla base EP , così è l'altezza del solido $EHPO$ all'altezza del solido $BGML$ ma come la base BM alla base FP , così il triangolo ABC al triangolo DEF , adunque come il triangolo ABC al triangolo DEF , così l'altezza del solido $EHPO$ all'altezza del solido $BGML$, ma l'altezza del solido $EHPO$ è la medesima, che l'altezza della piramide $DEFH$, e l'altezza del solido $BGML$ è la medesima, che l'altezza della piramide $ABCG$, è dunque come la base ABC alla base DEF , così l'altezza della piramide $DEFH$ all'altezza della piramide $ABCG$, onde le basi delle piramidi $ABCG$, $DEFH$ rispondono all'altezze contrariamente. Ma le basi delle piramidi $ABCG$; $DEFH$ rispondono contrariamente all'altezze, e sia come la base ABC alla base DEF , così l'altezza della piramide $DEFH$ all'altezza della piramide $ABCG$. Dico la piramide $ABCG$ essere uguale alla piramide $DEFH$. Perciocchè, fatte le medesime cose, come la base ABC alla base DEF , così l'altezza della piramide $DEFH$ all'altezza della piramide $ABCG$, e come la
base

base ABC alla base DEF , così il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP , onde come il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP , così farà l'altezza della piramide $DEFH$ all'altezza della piramide $ABCG$, ma l'altezza della piramide $DEFH$ è la medesima, che l'altezza del solido parallelepipedo $EHPO$, e l'altezza della piramide $ABCG$ è la medesima, che l'altezza del solido parallelepipedo $BGML$ è dunque come la base BM alla base EP , così l'altezza del solido parallelepipedo $EHPO$ all'altezza del solido parallelepipedo $BGML$, e que' solidi parallelepipedi, le cui basi rispondono contrariamente all'altezze, sono uguali fra loro, adunque il solido parallelepipedo $BGML$ è uguale al solido parallelepipedo $EHPO$ e la piramide $ABCG$ è la sesta parte del solido $BGML$, e del solido EHP O parimente la sesta parte è la piramide



mide DEFH, onde la piramide AB CG è uguale alla piramide DEFH, è però delle piramidi uguali, e che hanno le basi triangolari, le basi rispondono contrariamente all' altezze; e quelle piramidi, che hanno le basi triangolari, delle quali le basi rispondono contrariamente all' altezze, sono uguali fra loro, lo che bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O.

Dalle cose già dette si raccoglie, che di tutti i prismi uguali le basi rispondono contrariamente all' altezze: e che que' prismi, le cui basi rispondono contrariamente all' altezze, sono uguali fra loro, perciocchè i prismi, che hanno le medesime basi, e la medesima altezza, sono tripli delle piramidi.

T E O R E M A X.

PROPOSIZIONE X.

Ogni cono è la terza parte del
T. III. Q cilin.

cilindro , che ha la medesima base ,
e uguale altezza .

Abbia il cono la medesima base ,
che il cilindro , cioè il cerchio AB
 CD , e l' altezza uguale . Dico il co-
no essere la terza parte , del cilindro ,
cioè il cilindro essere triplo del cono .
Perciocchè , se il cilindro non è tri-
plo del cono , o sarà maggiore del

triplo , o minore ;
sia prima maggiore
del triplo , e descri-
vasi nel cerchio AB
 CD il quadrato AB
 CD , adunque il qua-



drato è maggiore del-
la metà del cerchio , e dal quadrato
 $ABCD$ drizzisi un prisma così alto ,
come il cilindro , il qual prisma sarà
maggiore della metà del cilindro , per-
chè se dintorno al cerchio $ABCD$ si
descriva un quadrato , sarà il quadra-
to descritto di dentro , la metà di
questo , che è descritto dintorno , e
sono i solidi parallelepipedì dalle me-
desime basi drizzati ugualmente alti ,

Coroll. cioè essi prismi , onde i prismi sono
della 7. fra loro , come le basi , il prisma a-
di qucs. dunque drizzato dal quadrato ABC
 D è

D è la metà del prisma drizzato dal quadrato, che si descrive dintorno al cerchio ABCD; ed è il cilindro minore del prisma drizzato dal quadrato, che si descrive dintorno al cerchio ABCD, il prisma dunque drizzato dal quadrato ABCD così alto, come il cilindro, è maggiore della metà del cilindro. Seghinsi le circonferenze AB, BC, CD, DA per mezzo ne' punti E, F, G, I, e giungansi AE, EB, BF, FC, CG, GD, DI, IA, adunque ciascun triangolo AFB, BFC, CGD, DIA è maggiore della metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale consiste, come si è dimostrato di sopra, drizzinsi da ciascun triangolo AEB, BFC, CGD, DIA i prismi alti come il cilindro, onde eziandio ciascuno de' prismi drizzati è maggiore della metà della porzione del cilindro, che è dintorno ad esso, perchè se si tirino per i punti E, F, G, I le parallele alle AB, BC, CD, DA, e compiscansi in esse i parallelogrammi AB, BC, CD, DA, da quali si drizzino solidi parallelepipedi così alti come il cilindro, saranno i prismi, che sono ne' triangoli AEB,

Q 2 BFC,

BFC, CGD, DIA, la metà di ciascuno de' solidi drizzati; e sono le porzioni del cilindro minori de' solidi parallelepipedo drizzati, adunque ancora i prismi, che sono ne' triangoli AEB, BFC, CGD, DIA, sono maggiori della metà delle porzioni del cilindro, che sono in esse, laonde segnando per mezzo l'altre circonferenze, e giungendo con linee rette, e da ciascun triangolo drizzando prismi così alti come il cilindro, e questo facendo sempre, alla fine lasceremo alcune porzioni del cilindro mi-



nori dell'eccesso, nel quale il cilindro avanza il triplo del cono, lasciasi, e siano AE, EB, BF, FC, CG, GD, DI, IA, adunque il rimanente prisma, la cui base è il poligono AEBFCGDI, e l'altezza medesima del cilindro, è maggiore del triplo del cono, ma il prisma,

Coroll. della 7. di ques. la cui base è il poligono AEBFCGDI, e la medesima altezza del cilindro è triplo della piramide, la cui base è il poligono AEBFCGDI, e la cima il medesimo punto, che del

del cono, la piramide dunque, la cui base è il poligono AEBFCGDI, e la cima il medesimo punto, che del cono, è maggiore del cono, che ha per base il cerchio ABCD, ma è minore, essendo compresa da esso, che è impossibile, onde non sarà il cilindro maggiore, che il triplo del cono. Dico oltre a ciò nè anche essere minore, che il triplo del cono; perciocchè, se egli è possibile, sia il cilindro minore, che il triplo del cono, sarà convertendo il cono maggiore, che la terza parte del cilindro, descrivasi nel cerchio ABCD il quadrato ABCD, adunque il quadrato è maggiore, che la metà del cerchio, e dal quadrato ABCD drizzisi una piramide, che abbia la medesima cima, che il cono, la piramide dunque drizzata sarà maggiore, che la metà del cono, perciocchè come abbiamo dimostrato, se dintorno al cerchio si descriva un quadrato, sarà il quadrato ABCD la metà di quello, che è descritto dintorno al cerchio, e se dal quadrato si drizzino solidi parallelepipedi così alti, come il cono, quali, si chiamano anche prismi, sarà quello, che si drizza dal quadrato di

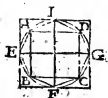
questo

Q. 3

AB

9. del
quin.

ABCD la metà di quello, che è drizzato dal quadrato descritto dintorno al cerchio, perchè sono fra loro come le basi, onde eziandio le terze parti di esse, la piramide dunque, la cui base è il quadrato ABCD è la metà di questa piramide, che si drizza dal quadrato descritto, dintorno al cerchio, ma la piramide drizzata dal quadrato descritto dintorno al cerchio è maggiore del cono, perchè lo comprende, adunque la piramide, la cui base è il quadrato ABCD, e la medesima cima, che del cono, è maggiore della metà del cono. Seghinsi le circonferenze AB, BC, CD, DA per mezzo ne' punti E, F, G, I, e giungansi AE, EB, BF, FC, CG, GD, DI, IA. Adunque ciascuno de' triangoli AEB, BFC, CGD, DIA, è maggiore, che la metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale consiste; drizzinsi da ciascun triangolo AEB, BFC, CGD, DIA le piramidi, che abbiano le medesime cime, che il cono, ciascuna dunque delle piramidi drizzate al me-



al medesimo modo, è maggiore, che la metà della porzione del cono, che è dintorno ad essa, laonde segando per mezzo l'altre circonferenze, e giungendo le linee rette, e da ciascun triangolo drizzando la piramide, che abbia la medesima cima, che il cono, e questo facendo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cono, che saranno maggiori dell'eccesso, nel quale il cono avanza la terza parte del cilindro, lascinsi, e siano quelle, che sono nelle $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DI, IA$, adunque la rimanente piramide, la cui base è il poligono $AEBFCGDI$, e la cima la medesima, che del cono, è maggiore della terza parte del cilindro, ma la piramide, la cui base è il poligono $AEBFCGDI$, e la cima medesima, che del cono, è la terza parte del prisma, la cui base è il poligono $AEBFCGDI$, e la medesima altezza, che del cilindro, onde il prisma, la cui base è il poligono $AEBFCGDI$, e la medesima altezza, che del cilindro, è maggiore del cilindro, la cui base è il cerchio $ABCD$, ma è minore, perciocchè da esso è compreso, che non è possibile, non è dunque.

dunque il cilindro minore, che il triplo del cono, e si è dimostrato non esser maggiore, che il triplo, onde è necessario, che il cilindro sia triplo del cono, e però il cono è la terza parte del cilindro, ogni cono dunque è la terza parte del cilindro, che ha la medesima base, e uguale altezza, lo che bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O.

Dalle quali cose appare ogni cono, o sia retto, o scaleno, essere la terza parte del cilindro o retto, o scaleno, che ha la medesima base, e uguale altezza.

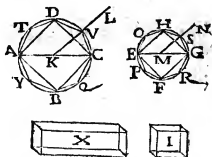
T E O R E M A XI.

PROPOSIZIONE XI.

I coni, e cilindri, che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

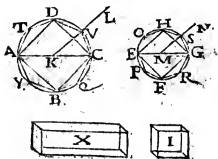
Siano i coni, e cilindri della medesima altezza, che abbiano per basi i cerchi $A B C D$, $E F G H$, e gli
aff

affi KL , MN , ed i diametri delle basi AC , EG . Dico come il cerchio $ABCD$ al cerchio $EFGH$, così essere il cono AL al cono EN . Se non è così, sarà come il cerchio $ABCD$ al cerchio $EFGH$, così il cono AL a qualche solido o maggiore, o minore del cono EN : sia prima ad un minore, che sia X , e l'eccesso del cono EN sopra il solido



X sia il solido I , adunque il cono EN è uguale a' solidi X , I . Descrivasi nel cerchio $EFGH$ il quadrato $EFGH$, laonde il quadrato è maggiore, che la metà del cerchio, drizzasi dal quadrato $EFGH$ una piramide così alta, come il cono, la piramide dunque drizzata è maggiore, che la metà del cono; perchè, se de-

scriviamo un quadrato dintorno al cerchio, e da esso drizziamo una piramide alta come il cono, sarà la piramide descritta di dentro la metà della piramide descritta dintorno; perciocchè sono fra loro come le basi, ma il cono è minore della piramide, che è descritto dintorno, adunque la piramide, la cui base è il quadrato EFGH, e la cima la medesima, che



del cono, è maggiore della metà del cono. Seghinsi le circonferenze EF, FG, GH, HE per mezzo ne' punti O, P, R, S; e giungansi OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH, ciascun triangolo dunque HOE, EPF, FRG, GSH è maggiore, che la metà della porzione del cerchio, nella quale consiste, drizzisi da ciascun

scun triangolo HOE, EPF, FRG, GSH una piramide alta come il cono, adunque ciascuna delle piramidi drizzate, è maggiore, che la metà della porzione del cono, che è in essa, laonde legando l'altre circonferenze per mezzo, e giungendo con linee rette, e drizzando da ciascun triangolo piramidi alte come il cono, e questo facendo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cono, che faranno minori del solido I. Lasciarsi, e siano quelle, che sono in esse HO, OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH, adunque la rimanente piramide, la cui base è il poligono HOEPFRGS, e la medesima altezza, che del cono, è maggiore del solido X, descrivasi nel cerchio ABCD il poligono DTAYBQCV simile, e similmente posto al poligono HOEPFRGS, e da esso drizzisi una piramide alta come il cono. AL, perchè dunque è come il quadrato della AC al quadrato della EG, così il poligono DTAYBQCV al poligono HOEPFRGS, e come il quadrato della AC al quadrato della EG, così il cerchio ABCD al cerchio EFGH; sarà come il cerchio

1. di.

ques.

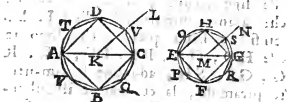
2. di.

ques.

Q 6

AB

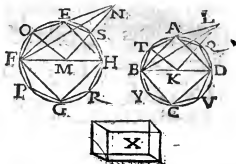
ABCD al cerchio EFGH, così il
 poligono DTAYBQCV al poligono
 HOEPFRGS; ma come il cer-
 chio ABCD al cerchio EFGH, co-
 sì il cono AL al solido X, e come
 il poligono DTAYBQCV al poli-
 gono HOEPFRGS, così la pirami-
 de, la cui base è il poligono DTA
 YBQCV, e la cima il punto L, al-
 la piramide, la cui base è il poligono



no HOEPFRGS, e la cima il punto N, come dunque il cono AL, al solido X, così la piramide, la cui base è il poligono DTA YBQCV, e la cima il punto L, alla piramide, la cui base è il poligono HOEPFRGS, e la cima il punto N, onde permutando: come il cono AL alla piramide, che è in esso, così il solido X alla piramide, che è nel cono EN,

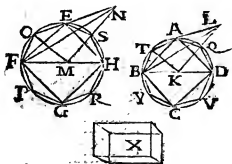
EN, ma il cono AL è maggiore della piramide, che è in esso, adunque il solido X è maggiore della piramide, che è nel cono EN, ma è minore, che è impossibile, non è dunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL ad un solido minore del cono EN; similmente si dimostrerà nè anche come il cerchio EFGH, il cerchio ABCD, così essere il cono EN a qualche solido minore del cono AL. Dico oltre a ciò non essere come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche cono maggiore del cono EN, perciocchè, se egli è possibile, sia ad un solido maggiore, che sia X, convertendoli dunque come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così sarà il solido X al cono AL, ma come il solido X al cono AL, così il cono EN a qualche solido minore del cono AL, come dunque il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così il cono EN a qualche solido minore del cono AL, che si è dimostrato impossibile, onde non è come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche solido maggiore del cono EN, e si è di.

N, avere proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH . Perciocchè, se il cono $ABCDL$ al cono $EFGHN$ non ha proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH , averà il cono $ABCDL$ a qualche solido minore, ovvero ad un maggiore del cono $EFGHN$ proporzione tripla, l'abbia prima ad un minore, che sia X , e descrivasi nel cerchio $EFGH$



il quadrato $EFGH$, il quadrato dunque è maggiore della metà del cerchio; drizzisi dal quadrato $EFGH$ una piramide così alta come il cono; adunque la piramide drizzata è maggiore, che la metà del cono. Seghinsi le circonferenze EE , FG , GH , HE per mezzo ne' punti O , P , R , S , e giungansi EO , OF , EP , PG , GR ,

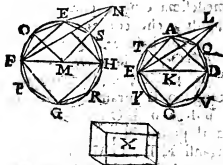
GR, RH, HS, SE. Laonde ciascun triangolo EOF, FPG, GRH, HSE è maggiore, che la metà delle porzione del cerchio EFGH nella quale consiste, drizzisi da ciascun triangolo EOF, FPG, GRH, HSE una piramide, che abbia la medesima cima, che il cono, adunque ciascuna delle piramidi drizzate è maggiore, che la metà della porzione del cono,



che è dintorno ad essa, e perciò segnando l'altre circonferenze per mezzo, e giungendo le linee rette, e da ciascuno de' triangoli drizzando le piramidi, che abbiano la medesima cima, che il cono, e questo sempre facendo, si lasceranno alla fine alcune porzioni del cono, che saranno minori dell'eccesso, nel quale il cono EFG

FGHN avanza il solido X; lascinsi, e siano quelle, che sono nelle EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE, onde la piramide rimanente; la cui base è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N, è maggiore del solido X; descrivasi ancora nel cerchio ABCD il poligono ATBYCVDQ simile, e similmente posto al poligono EOFPGRHS, dal quale drizzisi una piramide, che abbia la medesima cima, che il cono; de' triangoli, che contengono la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e la cima il punto L, uno sia LBT, e de' triangoli, che contengono la piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N, sia uno NFO, e giungansi KT, OM, perchè dunque il cono ABCDL è simile al cono EFGHN, sarà come BD ad FH, così l'asse KL all'asse MN, ma come BD ad FH, così BK ad FM; adunque come BK ad FM, così KL ad MN, e permutando come BK a KL, così FM ad MN, e perchè l'una, e l'altra è perpendicolare, e dintorno agli uguali angoli BKL, FMN sono i lati proporzionali, è dunque

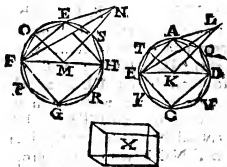
que simile il triangolo BKL al triangolo FMN : e similmente, perchè come il BK a KT , così è FM ad MO , e dintorno agli uguali angoli BKT , FMO sono i lati proporzionali, conciossiachè qual parte è l'angolo BKT di quattro retti, che sono al centro K , tal sia l'angolo MO di quattro retti, che sono al centro M ; sarà il triangolo BKT si-



mile al triangolo FMO : e perchè si è dimostrato come BK a KL , così FM ad MN , e BK è uguale a KT , ed FM ad MO ; sarà come TK a KL , così OM ad MN , e dintorno agli uguali angoli TKL , OMN essendo retti, sono i lati proporzionali; il triangolo dunque LKT è simile al triangolo NMO , e per la
simi-

similitudine de' triangoli BKL , FMN essendo come LB a BK , così NF ad FM , e per la similitudine de' triangoli BKT , FMO , come KB a BT , così MF ad FO , sarà per l'ugualità in proporzione ordinata come LB a BT , così NF ad FO ; oltre a ciò per la similitudine de' triangoli LTK , NOM , essendo come LT a TK , così NO ad OM , e per la similitudine de' triangoli KBT , OMF , come KT a TB , così MO ad OF , sarà per l'ugualità in proporzione ordinata come LT a TB , così NO ad OF ; e si è dimostrato come TB a BL , così OF ad FN ; onde per l'ugualità in proporzione ordinata come TL ad LB , così ON ad NF , de' triangoli dunque LTB , NOF sono i lati proporzionali, e però i triangoli LTB , NOF sono equiangoli, e simili fra loro, onde ancora la piramide, la cui base è il triangolo BKT , e la cima il punto L , è simile alla piramide, la cui base è il triangolo FMO , e la cima il punto N , perciocchè sono contenute da simili piani, ed uguali di numero, ma le piramidi simili, e che hanno le basi triangolari, sono
in

in tripla proporzione de' lati omologhi, adunque la piramide $BKTL$ alla piramide $FMON$ ha proporzione tripla di quella, che ha BK ad FM , similmente da' punti A, Q, D, V, C, Y a K , e da' punti E, S, H, R, G, P ad M tirando linee rette, e da' triangoli drizzando le piramidi, che abbiano le cime medesime, che il cono dimostreremo ciascuna pirami-

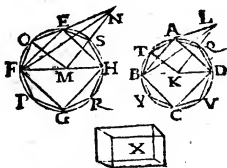


de del medesimo ordine a ciascuna dell' altro ordine, avere proporzione tripla di quella, che ha il lato BK omologo al lato omologo FM , cioè, che BD ad EK , ma siccome uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti, è dunque come la piramide $BKTL$ alla piramide $FMON$.

N, così tutta la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e la cima il punto L, e tutta in piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N, onde la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e la cima il punto L, alla piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N, ha proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH, e si pone il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e la cima il punto L al solido X avere proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH, come dunque il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e la cima il punto L, al solido X, così è la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e la cima il punto L, alla piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N, e permutando come il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e la cima il punto N, alla piramide, che è in esso, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e la cima il punto L, così il solido X alla piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N,

ma

ma detto cono è maggiore della piramide, che è in essa, perciocchè la comprende, adunque eziandio il solido X è maggiore della piramide, la cui bale è il poligono $EOFPGRHS$, e la cima il punto N , ma è minore, che è impossibile, il cono dunque, la cui base è il cerchio $ABCD$ e la cima il punto L , a qualche solido minore del cono, la cui bale



è il cerchio $EFGH$, e la cima il punto N , non ha proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH : similmente dimostreremo nè anche il cono $EFGHNS$ a qualche solido minore del cono $ABCDL$ avere tripla proporzione di quella, che ha FH a BD , laonde dico nè anche il cono $ABCDL$ ad un solido maggiore del
cono

cono EFGHN avere proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH. Perciocchè, se egli è possibile, l'abbia a qualche solido maggiore, che sia X, convertendo dunque il solido X al cono ABCDL ha proporzione tripla di quella, che ha FH a BD, ma come il solido Z al cono ABCDL, così il cono EFGHN a qualche solido minore del cono ABCDL, adunque ancora il cono EFGHN ad un solido minore del cono ABCDL averà proporzione tripla di quella, che ha FH a BD, che si è dimostrato impossibile, il cono dunque ABCDL ad un solido maggiore del cono EFGHN non ha tripla proporzione di quella, che ha BD ad FH, e si è dimostrato nè anche a un minore, onde il cono ABCDL al cono EFGHN ha proporziooe tripla di quella, che ha BD ad FH, ma come il cono al cono, così il cilindro al cilindro, perciocchè il cilindro, che consiste nella medesima base, che il cono, ed è ugualmente alto, e triplo del cono, essendosi dimostrato ogni cono essere la terza parte del cilindro, che abbia la medesima base, e l'altezza uguale, adunque *ques.* 19. di
anco-

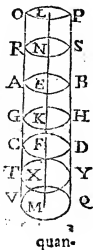
ancora il cilindro al cilindro averà proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH , i coni dunque, e cilindri simili sono fra loro in proporzione tripla di quella, che hanno i diametri delle basi, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XIII.

PROPOSIZIONE XIII.

Se il cilindro sia segato da un piano parallelo a' piani opposti, farà come il cilindro al cilindro, così l'asse all'asse.

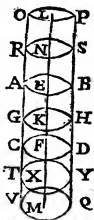
Il cilindro AD sia segato dal piano GH porallelo a' piani opposti AB , CD , il quale seghi l'asse EF nel punto K . Dico come il cilindro BG al cilindro GD , così essere l'asse EK all'asse KF . Prolunghisi l'asse EF dall'una, e l'altra parte ne' punti L , M , e all'asse EK pongansi uguali



quante si vogliono EN , NL , ed all'asse FK uguali quante si vogliono FX , XM , e per i punti L , N , X , M tirinsi piani paralleli agli AB , CD , e ne' piani per L , N , X , M dintorno a' centri L , N , X , M , intendansi i cerchi OP , RS , TY , VQ uguali agli AB , CD , ed intendansi i cilindri PR , RB , DT , TQ . Perchè dunque gli assi LN , NE , EK sono uguali fra loro, saranno i cilindri PR , RB , BG fra loro come le basi, e le basi sono uguali, adunque i cilindri PR , RB , BG sono uguali: ed essendo gli assi LN , NE , EK uguali fra loro, e altresì i cilindri PR , RB , BG , quante volte è multiplice l'asse KL dell'asse EK , tante volte sarà multiplice eziandio il cilindro PG del cilindro GB , e per la medesima ragione quante volte è multiplice l'asse MK dell'asse KF , tante volte è multiplice ancora il cilindro QG del cilindro GD , e se l'asse LK sia uguale all'asse KM , sarà il cilindro PG uguale al cilindro GQ , e se l'asse LK sia maggiore dell'asse KM , ancora il cilindro PG sarà maggiore del cilindro GQ , e se minore, minore, essendo

T. II. R dun-

dueque quattro grandezze , cioè gli assi EK , KF , ed i cilindri BG , GD , si sono presi ugualmente multipli dell' asse EK , e del cilindro BG l' asse KL , ed il cilindro PG ; e dell' asse KF , e del cilindro GD ugualmente multipli l' asse KM , ed il cilindro GQ , e si è dimostrato , se l' asse LK avanza l' asse KM , il cilindro PG ancora avanzare il cilindro GQ , e se è uguale , essere uguale , e se minore , minore , e dunque l' asse EK all' asse KF , come è il cilindro BG al cilindro GD , laonde , se il cilindro sia segato da un piano parallelo a' piani opposti , sarà come il cilindro al cilindro , così l' asse all' asse , lo che bisognava dimostrare .



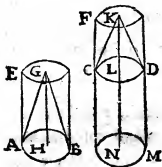
T E O R E M A XIV.

PROPOSIZIONE XIV.

I conì , e i cilindri , che hanno le basi uguali , sono fra loro come l' altezze .

Sia-

Siano nelle uguali basi AB , CD i cilindri EB , FD . Dico come il cilindro EB al cilindro FD , così effete l'asse GH all'asse KL . Prolunghisi l'asse KL al punto N , e pongasi la LN uguale all'asse GH , e dintorno all'asse LN intendasi il cilindro CM . Perchè dunque i cilindri EB , CM hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi, e



le basi sono uguali, adunque ancora i cilindri EB , CM saranno uguali fra loro: e perchè il cilindro FM è segato dal piano CD parallelo agli opposti piani, sarà come il cilindro CM al cilindro FD , così l'asse LN , all'asse KL ; ed il cilindro CM è uguale al cilindro EB , e l'asse LN all'asse GH , è dunque come il
R 2 cilin.

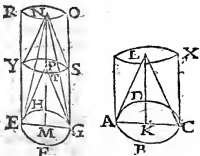
cilindro EB al cilindro FD, così l'asse GH all'asse KL; e come il cilindro EB al cilindro FD, così il cono ABG al cono CDK, perciocchè i cilindri sono tripli de' cono, adunque eziandio come l'asse GH all'asse KL, così il cono ABG al cono CDK, ed il cilindro EB al cilindro FD, onde i cono, e cilindri, che hanno le basi uguali, sono fra loro come altezze, lo che bisognava dimostrare.

T E O R E M A XV.
PROPOSIZIONE XV.

De' cono, e cilindri uguali le basi rispondono contrariamente all' altezze; e que' cono, e cilindri, de' quali le basi rispondono contrariamente all' altezze, sono fra loro uguali.

Siano i cono, e cilindri uguali, che hanno per bale i cerchi ABCD, EFGH, i cui diametri AC, EG, e gli assi KL, MN, che sono l' altezze de' cono, e cilindri, e compiscan.

scansi i cilindri AX, EO. Dico le basi de' cilindri AX, EO rispondere all' altezze contrariamente, cioè come la base ABCD alla base EFGH, così essere l' altezza MN all' altezza KL. Perciocchè l' altezza KL ovvero è uguale all' altezza MN, disuguale; sia prima uguale, ed è il cilindro AX uguale al cilindro EO, II. di ques. ma que' con, e cilindri, che hanno

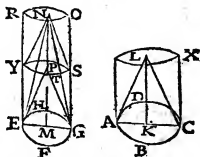


la medesima altezza, fra loro sono come le basi; è dunque la base ABCD uguale alla base EFGH, e però si rispondono contrariamente, e come la base ABCD alla base EFGH, così è l' altezza MN all' altezza KL. Ma l' altezza KL non sia uguale all' altezza MN, ma sia maggiore la MN; e traggasi dalla MN la PM uguale all' altezza LK, e per P sia

R₃

sega.

11. di
ques. segato il cilindro EO dal piano TY S parallelo agli opposti piani de' cerchi EFGH, RO, ed intendasi il cilindro ES, la cui base è il cerchio EFGH, e l'altezza PM: perchè dunque il cilindro AX è uguale al cilindro EO, ed è un altro cilindro ES, sarà come il cilindro AX al cilindro ES, così il cilindro EO al cilindro ES, ma come il cilindro A



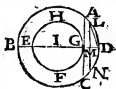
13. di
ques. X al cilindro ES, così è la base ABCD alla base EFGH, perciocchè i cilindri AX, ES hanno la medesima altezza; e come il cilindro EO al cilindro ES, così l'altezza MN all'altezza MP, conciossiacosachè il cilindro EO sia segato dal piano TY S parallelo a' piani opposti, è dunque come la base ABCD alla base EFGH, così l'altezza MN all'altezza MP,

MP, e l' altezza MP è uguale all' altezza KL, onde come la base AB CD alla base EFGH, così l' altezza MN all' altezza KL, le basi dunque de' cilindri uguali AX, EO rispondono contrariamente all' altezze. Ma le basi de' cilindri AX, EO rispondono contrariamente all' altezze, e sia come la base ABCD alla base EFGH, così l' altezza MN all' altezza KL. Dico il cilindro AX essere uguale al cilindro EO. Avendo fatto le medesime cose, perchè come la base ABCD alla base EFGH, così è l' altezza MN all' altezza KL, e l' altezza KL è uguale all' altezza MP, sarà come la base ABCD alla base EFGH, così l' altezza MN all' altezza MP, ma come la base ABCD alla base EFGH, così il cilindro AX al cilindro ES, perciocchè hanno l' altezza medesima; e come l' altezza MN all' altezza MP, così il cilindro EO al cilindro ES, è dunque come il cilindro AX al cilindro ES, così il cilindro EO al cilindro ES onde il cilindro AX è uguale al cilindro EO, similmente ancora ne' coni, lo che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XVI.

Essendo due cerchi dintorno al medesimo centro, descrivere nel maggiore un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il minor cerchio.

Siano due cerchi dati $A B C D$, $E F G H$ dintorno al medesimo centro I , bisogna nel maggior cerchio $A B C D$ descrivere un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il minor cerchio $E F G H$. Tirisi per lo centro I la linea retta $B D$, e dal punto G , tirisi la $A G$ perpendicolare alla $B D$, e prolunghisi nel punto C . Adunque la $A C$ tocca il cerchio $E F G H$; laonde segando la circonferenza $B A D$ per mezzo, e la sua metà ancora per mezzo, e facendo questo sempre, alla fine lasceremo una circonferenza minore della $A D$. Lasciati, e sia $L D$, e dal punto L tirisi la



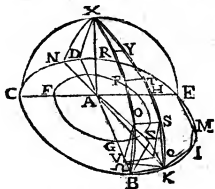
fi la LM perpendicolare alla BD , e prolunghisi nel punto N , e giungansi ED , DN . Adunque la LD è uguale alla DN , e perchè la LN è parallela alla AC , e la AC tocca il cerchio $EFGH$, la LN non toccherà il cerchio $EFGH$, e molto meno le ED , DN toccheranno il cerchio $EFGH$, e se nel cerchio $ABCD$ adatteremo linee rette uguali alla LD , descriverassi in esso il poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocca il minor cerchio, lo che bisognava fare..

P R O B L E M A II,
PROPOSIZIONE XVII.

Essendo due sfere dintorno al medesimo centro, descrivere nella maggiore un solido poliedro, cioè di molti lati, che non tocchi la superficie della minore sfera.

Intendansi due sfere dintorno al medesimo centro A . Bisogna nella maggiore sfera descrivere un solido di molti lati, che non tocchi la superficie.

perficie della minore sfera. Seghinsi le sfere da qualche piano tirato per lo centro, i segamenti saranno cerchi, perciocchè stando fermo il diametro del cerchio, e girato il mezzo cerchio dintorno, si è fatta la sfera, adunque intendendo il mezzo cerchio in qualsivoglia posizione, il piano, che passa per esso farà un cerchio nel-

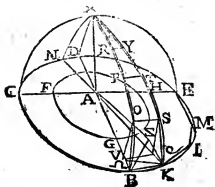


la superficie della sfera, ed è manifesto essere cerchio massimo, conciossiachè il diametro della sfera, quale è diametro del cerchio, e del mezzo cerchio, sia maggiore di tutte le linee rette, che si tirano nel cerchio, e nella sfera. Sia dunque nella maggiore sfera il cerchio BCDE, nella minore il cerchio FGHP, e tirinsi i due

16. del
terzo.

due diametri di essi BD , CE ad angoli retti fra loro, ed essendo i due cerchi $BCDE$, FGP dintorno al medesimo centro, nel maggiore BC *Per*
 DE descrivasi un poligono di lati u- *l' ant.*
 guali, e pari di numero, che non tocchi il minor cerchio FGP , i lati del quale nel quadrante del cerchio BE sieno BK , KI , IM , ME , e giunta KA prolunghisi in N , e dal punto A costituisca AX perpendicolare al piano del cerchio $BCDE$, che tocchi la superficie della sfera nel punto X , e per AX , e ciascuna di esse BD , KN tirinsi i piani, che per le cose già dette nella superficie della sfera, saranno cerchi massimi; facciano dunque, e siano ne' diametri BD , KN i mezzi cerchi loro BXD , KXN , e perchè la XA è perpendicolare al piano del cerchio BC *18. del.*
 DE , tutti i piani, che passano per *l' 12.*
 la XA , saranno al piano del cerchio $BCDE$ retti; onde ancora i mezzi cerchi BED , BXD , KXN sono retti al medesimo piano, e perchè i mezzi cerchi BED , BXD , KXN sono uguali, essendo negli uguali diametri BD , KN , saranno ancora i quadranti BE , BX , KX fra loro u-
 R 6 gua-

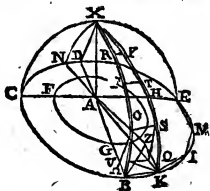
- quali, quanti lati dunque del poligono sono nel quadrante BE, tanti saranno ne' quadranti BX, EX uguali a BK, KI, IM, ME, e descrivansi, e siano BO, OP, PR, RX, KS, ST, TY, YX, e giungansi S
 3. del. O, TP, YR, e da' punti O, S tirinfi le perpendicolari al piano del
 4. 11. cerchio BCDE, caderanno queste



ne' comuni segmenti de' piani BD, KN, perchè ancora i piani de' mezzi cerchi BXD, KXN sono retti al piano del cerchio BCDE, cadano dunque, e siano OV, SQ; essendo dunque negli uguali mezzi cerchi BXD, KXN prese le circonferenze uguali BO, KS, e tirate le perpendicolari OV, SQ, sarà la OV uguale

le alla SQ , e la BV uguale alla KQ , ed è tutta la BA uguale a tutto la KA , adunque eziandio la rimanente VA è uguale alla rimanente QA , come dunque la BV alla VA , così la KQ alla QA , e però la VQ è ^{2, del} ~~sesto.~~ parallela alla BK , ed essendo ciascuna di esse OV , SQ perpendicolare al piano del cerchio $BCDE$, sarà la OV parallela alla SQ , e si è dimostrata uguale ad essa, adunque le Q ^{6. del.} V , SO , sono uguali, e parallele, e ^{11.} perchè la QV è parallela alla SO , e ^{33. del.} parallela alla KB , sarà la SO paral- ^{prim.} lela ancora alla KB ; e BO , KS le ^{9. del.} congiungono, onde eziandio il qua- ^{11.} drilatero $KBOS$ è in un piano, perchè, se due linee rette siano parallele, ed in ciascuna di esse si pigliano quali punti si vogliano, la linea retta, che congiunge detti punti, è nel medesimo piano, nel quale sono le parallele, e per la medesima ragione ^{2. del.} amendue i quadrilateri $STOP$, TPR ^{11.} sono in un piano, ed è in un piano il triangolo YRX , se dunque da' punti O , S , P , T , R , Y intendiamo tirate le linee rette ad A , si costituirà una figura solida di molti lati, fra le circonferenze BK , KX ,
X,

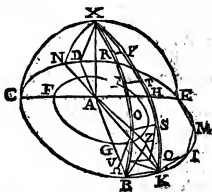
X, composta di piramidi, le cui basi sono i quadrilateri **KBOS**, **SOPT**, **TPRY** ed il triangolo **YRX**, e la cima il punto **A**, e se in ciascun lato **KI**, **IM**, **ME**, siccome in **KB** facciamo le medesime cose, e così negli altri tre quadranti, e nell'altra mezza sfera, si costituirà una figura di molti lati descritta nella sfera, e



composta di piramidi, le cui basi sono i detti quadrilateri, ed il triangolo **YRX**, e gli altri del medesimo ordine, e la cima il punto **A**. Dico la detta figura di molti lati non toccare la superficie della minore sfera, nella quale è il cerchio **FGP**. Tirisi dal punto **A**, al piano del quadrilatero **KBSO** la perpendicolare **AZ**,
che

che lo tocchi nel punto Z , e giungansi BZ , ZK , laonde perchè la AZ è perpendicolare al piano del quadrilatero $KBSO$, sarà ancora perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo piano, adunque la AZ è perpendicolare a ciascuna di esse BZ , ZK , e perchè la AB è uguale alla AK , sarà il quadrato della AB uguale al quadrato della AK , e sono i quadrati dalle AZ , ZB uguali al quadrato della AB , conciosiacchè l'angolo Z sia retto, ed i quadrati delle AZ , ZK sono uguali al quadrato della AK , onde i quadrati delle AZ , ZB sono uguali a' quadrati delle AZ , ZK , traggasi il quadrato comune della AZ ; il rimanente dunque della BZ è uguale al rimanente della ZK , e però la linea retta BZ è uguale alla retta ZK : similmente dimostreremo quelle, che si tirano dal punto Z ad O , S , essere uguali all'una, e l'altro di esse BZ , ZK , il cerchio dunque descritto dal centro Z coll'intervallo di una di esse ZB , ZK passerà anche per i punti O , S , e sarà nel cerchio il quadrilatero $KBOS$, e perchè la KB è maggiore della QV , e
la

la QV uguale alla SO , sarà ancora la KB maggiore della SO , ma la KB è uguale all'una e l'altra di esse KS , BO , l'una, e l'altra dunque KS , BO è maggiore della SO , onde essendo nel cerchio il quadrilatero $KPOS$, ed essendo uguali le KB , BO , KS , e la OS minore, e BZ semidiametro del cerchio, sarà il qua-



drato della KB maggiore, che doppio del quadrato di BZ . Tirisi dal punto K la $K\Omega$ perpendicolare alla BV , e perchè la BD è minore, che doppia della $D\Omega$; ed è come la BD alla $D\Omega$, così il rettangolo contenuto dalle DB , $B\Omega$, al rettangolo contenuto dalle $D\Omega$, ΩB , cioè descritto il quadrato di $B\Omega$, e compito il paral.

rallelogrammo in ΩD : farà ancora il
 rettangolo contenuto dalle DB , $B\Omega$
 minore, che doppio di quello, che
 è contenuto dalle $D\Omega$, ΩB , e giunta
 KD quello, che è contenuto dalle D
 B , $B\Omega$, è uguale al quadrato di K
 B , e quello, che è contenuto dalle
 DB , ΩB , è uguale al quadrato di
 $K\Omega$, il quadrato dunque di KB è
 minore, che doppio del quadrato di
 $K\Omega$, ma il quadrato di KB è mag-
 giore, che doppio del quadrato di B
 Z , adunque il quadrato di $K\Omega$ è
 maggiore del quadrato di BZ , e per-
 chè la BA è uguale alla AK , farà
 il quadrato di BA uguale al quadrato
 di AK , e sono al quadrato di BA
 uguali i quadrati di BZ , ZA , ed al
 quadrato di AK uguali i quadrati K
 Ω , ΩA , adunque i quadrati di BZ ,
 ZA sono uguali a' quadrati di $K\Omega$,
 ΩA , de' quali il quadrato di $K\Omega$ è
 maggiore, che il quadrato di BZ ,
 adunque il rimanente di ΩA , è mi-
 nore, che il quadrato di ZA , e pe-
 rò la linea retta AZ è maggiore del-
 la retta $A\Omega$, è dunque molto mag-
 giore la AZ , che la AG , ed è la
 AZ in una base del poliedro, e la
 AG nella superficie della sfera mino-
 re,

re , onde il poliedro non tocca la superficie della minore sfera , adunque essendo due sfere dintorno al medesimo centro , si è descritto nella maggiore un solido di molti lati , che non tocca la superficie della minore sfera , lo che bisognava fare .

C O R O L L A R I O .

E se anche in un' altra sfera si descriva un solido poliedro simile al solido poliedro descritto nella sfera B C D E , averà il solido poliedro nella sfera B C D E al solido poliedro nell' altra sfera , tripla proporzione di quella , che ha il diametro della sfera B C D E al diametro dell' altra sfera ; perciocchè divisi , che siano i solidi in piramidi uguali di numero , e del medesimo ordine , faranno le piramidi simili ; ma le piramidi simili sono fra loro in proporzione tripla di quella , che hanno i lati omologhi , adunque la piramide ,

de , la cui base il quadrilatero $KBOS$, e la cima il punto A , alla piramide , che è nell' altra sfera del medesimo ordine , ha proporzione tripla di quella , che ha il lato omologo al lato omologo , cioè AB semidiametro della sfera dintorno al centro A , al semidiametro dell' altra sfera . E somigliantemente ciascuna piramide di quelle , che sono nella sfera dintorno al centro A , a ciascuna piramide del medesimo ordine , che sono nell' altra sfera , avrà proporzione tripla di quella , che ha AB al semidiametro dell' altra sfera , e come è uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti , così saranno tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti , onde tutto il solido poliedro , che è nella sfera dintorno al centro A a tutto il solido poliedro , che è nell' altra sfera , avrà tripla proporzione di quella , che ha

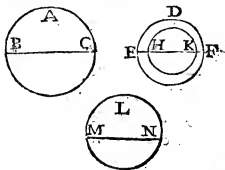
AB

AB al semidiametro dell' altra sfera, cioè il diametro BD al diametro dell' altra sfera.

T E O R E M A XVI.
PROPOSIZIONE XVIII.

Le sfere fra loro sono in tripla proporzione di quella, che hanno i loro diametri.

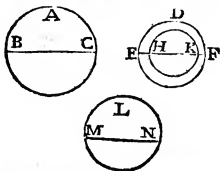
Intendansi le sfere ABC, DEF, i diametri delle quali siano BC, EF. Dico la sfera ABC alla sfera DEF avere proporzione tripla di quella, che ha la BC alla EF. Se non



è così, la sfera ABC ad una sfera minore di essa DEF, o ad una maggiore averà proporzione tripla di quella,

ta, che ha la BC alla EF . L'abbia *Per*
 prima ad una minore, cioè ad HK , *l' ant.*
 ed intendasi la sfera DEF di intorno
 al medesimo centro, che la sfera HK ,
 e descrivasi nella maggiore sfera
 DEF un solido poliedro, che non
 tocchi la superficie della minore sfera
 HK , e nella sfera ABC descrivasi *Per lo*
 un solido poliedro simile a quello, *coroll.*
 che è descritto nella sfera DEF , *adell' an-*
 dunque il solido poliedro, che è nel- *tec.*
 la sfera ABC al solido poliedro, che
 è nella DEF , averà tripla propor-
 zione di quella, che ha la BC alla
 EF , e la sfera ABC alla sfera HK
 ha tripla proporzione di quella, che
 ha la BC alla EF , come dunque la
 sfera ABC alla sfera HK , così il
 solido poliedro nella sfera ABC al
 solido poliedro nella sfera DEF , e
 permutando come la sfera ABC al
 solido poliedro, che è in essa, così
 la sfera HK al solido poliedro, che
 è nella sfera DEF , ma la sfera AB
 C è maggiore del solido poliedro,
 che è in essa; adunque la sfera HK
 è maggiore del solido poliedro, che
 è nella sfera DEF , ma è ancora mi-
 nore; perciocchè da esso è compresa,
 lo che non è possibile, la sfera dun-
 que

que ABC ad una sfera minore della DEF non ha proporzione tripla di quella, che ha la BC alla EF. Similmente dimostreremo nè anche la sfera DEF ad una sfera minore della ABC avere tripla proporzione di quella, che ha la EF alla BC. Dico oltre a questo la sfera ABC non avere ad una sfera maggiore della DEF tripla proporzione di quella, che



ha la BC alla EF. Perciocchè l'abbia, se egli è possibile, ad una maggiore, che sia LMN, convertendo dunque la sfera LMN alla sfera ABC ha proporzione tripla di quella, che ha il diametro EF al diametro BC, e come la sfera LMN alla sfera ABC, così la sfera DEF ad una sfera minore della ABC, come si è dimostrato di sopra, perchè la sfera
LMN

LMN è maggiore della DEF, onde ancora la sfera DEF ad una sfera minore della ABC ha proporzione tripla di quella, che ha la EF alla BC, che si è dimostrato essere impossibile, adunque la sfera ABC alla sfera maggiore della DEF non ha proporzione tripla di quella, che ha la BC alla EF, e si è dimostrato nè anche ad una minore, adunque la sfera ABC alla sfera DEF averà tripla proporzione di quella, che ha la BC alla EF, lo che bisognava dimostrare.

*Fine del Duodecimo
Libro.*

5-9-271

Z

005660683









MC



